

OCTÁVIO AUGUSTO SCHWEICERSKI SOBREIRO

MODELOS COSMOLÓGICOS COM INTERAÇÕES NO SETOR
ESCURO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós- Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Medeiros Kremer

CURITIBA

2011




UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TÍTULO: **MODELOS COSMOLÓGICOS COM INTERAÇÕES NO SETOR ESCURO**

OCTAVIO AUGUSTO SCHWEICERSKI SOBREIRO

Em sessão pública iniciada às quatorze horas, nesta data, após um Seminário sob o título acima, e posterior arguição esta banca examinadora, decidiu atribuir ao candidato o conceito global A

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. GILBERTO MEDEIROS KREMER (Orientador/Presidente) (UFPR)		<u>A</u>
Prof. ALBERTO VAZQUEZ SAA (UNICAMP)		<u>A</u>
Prof. RICARDO LUIZ VIANA (UFPR)		<u>A</u>

Curitiba, 29 de julho de 2011.

Sobreiro, Octávio Augusto Schweickerski
Modelos cosmológicos com interações no setor escuro / Octávio
Augusto Schweickerski Sobreiro. – Curitiba, 2011.
57 f.: il., tab.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor
de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física.
Orientador: Gilberto Medeiros Kremer

1. Cosmologia. 2. Relatividade. I. Kremer, Gilberto Medeiros.
II. Universidade Federal do Paraná. III. Título.

CDD: 530.11

Agradecimentos

- À minha mãe, Onilza Mafalda Schweickerski, por todo apoio, carinho e compreensão durante todos esses anos;
- Ao meu orientador Prof. Dr. *Gilberto Medeiros Kremer*, pelos sábios conselhos bem como pela motivação e influência decisiva na minha formação acadêmica e científica;
- Aos colegas de pós-graduação, particularmente aos meus companheiros de grupo Rudinei Celso de Souza e Tiago Gutierrez da Silva pelo apoio bem como pelas discussões científicas produtivas;
- Aos professores do Departamento de Física;
- À CAPES pelo apoio financeiro;
- À Universidade Federal do Paraná.

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo de modelos cosmológicos para um Universo espacialmente plano cujos constituintes são os campos de matéria e de energia escura, sendo que o primeiro inclui os bárions e a matéria escura. Os constituintes estão em interação e os processos irreversíveis são levados em conta através da inclusão de uma pressão fora do equilíbrio. Esta, por sua vez, é descrita dentro das estruturas teóricas das teorias termodinâmicas de primeira e segunda ordens. Os campos de matéria e energia escura são acoplados através de seus índices barotrópicos, os quais são considerados como funções da razão entre suas densidades de energia. Uma análise bayesiana é realizada, a fim de se estabelecer os vínculos cosmológicos nos parâmetros livres do modelo. Uma comparação com o limite sem viscosidade é também feita. É mostrado que as igualdades dos parâmetros de densidade do campo de matéria e da energia escura bem como da transição dos regimes desacelerado para acelerado ocorre no passado, quando os processos irreversíveis ainda estão presentes. Além disso, é exibido que os parâmetros de densidade e de desaceleração bem como o módulo de distância teórico possuem o comportamento correto esperado para um cenário viável do status atual do Universo.

Abstract

The objective of this work is to study cosmological models for a spatially flat Universe whose constituents are a dark energy field and a matter field which includes baryons and dark matter. The constituents are supposed to be in interaction and irreversible processes are taken into account through the inclusion of a non-equilibrium pressure. The non-equilibrium pressure is described within the framework of a first order and second order thermodynamic theory. The dark energy and matter fields are coupled through their barotropic indexes, which are considered as functions of the ratio between their energy densities. A Bayesian analysis to set observational constraints on the free parameters of the model is employed. A comparison of the viscous model with the non-viscous one is also performed. It is shown that the equality of the dark energy and dark matter density parameters and the decelerated-accelerated transition occur at earlier times when the irreversible processes are still present. Furthermore the density and deceleration parameters and the distance modulus are shown to have the correct behavior expected for a viable scenario of the present status of the Universe.

[...] Se a ciência descobre explosivos, esclarece o amor quanto à utilização deles na abertura de estradas que liguem os povos; se a primeira confecciona um livro, ensina o segundo como gravar a verdade consoladora. A ciência pode concretizar muitas obras úteis, mas só o amor institui as obras mais altas. Não duvidamos de que a primeira, bem interpretada, possa dotar o homem de um coração corajoso; entretanto, somente o segundo pode dar um coração iluminado. [...]

(- Emmanuel)

Sumário

1	Introdução	2
2	Relatividade Geral	5
2.1	Dinâmica de uma partícula em Relatividade Geral	5
2.2	Curvatura	7
2.3	Tensor energia-momentum	9
2.4	As equações de campo de Einstein	10
3	Cosmologia	11
3.1	Princípios básicos da Cosmologia	11
3.2	Métrica de Robertson-Walker	12
3.3	Tensor energia-momentum na métrica de Robertson-Walker	14
3.4	A equação de Friedmann e a Cosmologia Padrão	14
3.5	Parâmetros observacionais	17
3.5.1	Densidade crítica e parâmetro de densidade	17
3.5.2	Parâmetro de desaceleração	18
3.5.3	Módulo de distância teórico	18
3.5.4	Distância de luminosidade	18
3.6	Sobre a matéria escura	19
3.7	Energia escura e o modelo Λ CDM	20
4	Teoria Cinética Relativística	22
4.1	Teoria de Eckart	22
4.2	Termodinâmica estendida	25
5	Tópicos de Estatística em Cosmologia	27
5.1	Inferência Bayesiana	27
5.2	Teste χ^2	28
5.2.1	Marginalização	29
5.2.2	χ^2 e qualidade do modelo	29

5.2.3	Limites de confiança	30
6	Modelos cosmológicos com interações no setor escuro	33
6.1	Modelo escuro interagente - caso não-viscoso	33
6.1.1	Caso $F(r) = constante < 0$	35
6.1.2	Caso $F(r)$ variável	36
6.1.3	Vínculos cosmológicos	37
6.2	Modelos viscosos com interações no setor escuro	39
6.2.1	Fluidos escuros dissipativos e interagentes	39
6.2.2	Modelo cosmológico na formulação de Eckart	40
6.2.3	Modelo viscoso segundo a termodinâmica estendida	45
6.2.4	Uma alternativa para a pressão dinâmica	47
7	Conclusão	52
7.1	Modelos interagentes sem viscosidade	52
7.2	Modelos viscosos e interagentes na termodinâmica de primeira ordem	52
7.3	Modelos viscosos e interagentes na termodinâmica de segunda ordem	53
7.4	Trabalhos Futuros	53
	REFERÊNCIAS	54

Capítulo 1

Introdução

Diversas observações concernentes à natureza das curvas de rotação de galáxias do tipo espiral [1], bem como outros experimentos astronômicos, sugerem que as partículas massivas que compõem os corpos luminosos no Universo representem apenas uma pequena parcela da quantidade total, sendo que a parte mais significativa é atribuída a uma componente denominada *matéria escura*.

Além disso, observações astronômicas recentes, referentes a dados de supernovas do tipo Ia, mostram que o Universo está passando de um regime desacelerado para uma fase acelerada [2, 3]. Verifica-se também que os constituintes usuais do Universo não são capazes de descrever tal fenômeno, demandando a existência de um componente novo e desconhecido. A este é dado o nome de *energia escura*, o qual deve representar cerca de 70% da densidade de energia total do Universo a fim de estar de acordo com as observações. Tal componente deve possuir também propriedades exóticas, como uma pressão negativa para se explicar a expansão acelerada do Universo.

Tendo em vista que o *Modelo Padrão* da Cosmologia, conhecido como Big Bang quente, baseado na teoria da relatividade geral de Einstein, é completamente incapaz de descrever a expansão acelerada do Universo, muitos modelos alternativos foram propostos para se explicar tal fenômeno. O mais simples de todos, conhecido como Λ CDM (do inglês *Lambda Cold Dark Matter*) [4], emprega uma constante cosmológica para descrever a expansão acelerada, obtendo uma notável concordância com os dados observacionais. Todavia, esse modelo oferece poucos detalhes sobre a natureza da energia escura. Além disso, ele sofre de vários problemas teóricos, como uma grande discrepância (cerca de 120 ordens de grandeza) entre os valores predito e observado da constante cosmológica [5]. Modelos contendo correções na ação de Einstein-Hilbert [6, 7, 8] foram também considerados, no intuito de se explicar os dados astronômicos. Além disso, modelos cosmológicos considerando os gases de Chaplygin e de Van Der Waals bem como uma energia escura holográfica [9, 10, 11, 12, 13, 14] foram propostos para se descrever a expansão acelerada. Em vários artigos é proposto também que a energia e a matéria escuras estão acopladas e não evoluem separadamente [15, 16, 17, 18, 19].

A conclusão observacional de que existe um acoplamento entre os campos de matéria e energia escura culminou numa busca por possíveis modelos cosmológicos que descrevessem esse comportamento. Todavia, em tais propostas os termos de interação são arbitrários, assumindo usualmente a forma $Q(\alpha_m, \rho_m, \alpha_{de}, \rho_{de}) \simeq \alpha_m \rho_m + \alpha_{de} \rho_{de}$, onde α_m e α_{de} são dois parâmetros de acoplamento [20]. A fim de se reduzir o número de parâmetros livres dos modelos,

a hipótese $\alpha_m = \alpha_{de} = b^2$ é utilizada [21], onde b é uma constante. Os vínculos observacionais, provenientes de dados referentes a supernovas do tipo Ia e de observações do WMAP, sugerem que $b^2 < 10^{-2}$ no nível 3σ . Isto permite assumir a forma $Q = 3Hb^2(\rho_m + \rho_{de})$ para o termo de interação, onde H denota o parâmetro de Hubble. A estabilidade dos modelos cosmológicos que consideram essa forma do termo de interação é garantida em vários cenários, desde um Universo contendo uma k-essência [22], isto é, um potencial escalar contendo um termo cinético não-canônico, até modelos de energia escura holográfica para os quais a idade do Universo é escolhida como escala de comprimento. Esta forma da energia escura é conhecida em inglês como *Agegraphic Dark Energy*, onde o *Age* demonta à idade do Universo como escala de comprimento, isto é, as dimensões do sistema para as quais os fenômenos quânticos decorrentes do princípio holográfico são relevantes [23].

Outra proposta encontrada na literatura para se descrever a energia escura é a de se empregar uma classe diferenciada de espinores, conhecidos como *espinores escuros*, os quais são auto-espinores do operador de conjugação de carga [24]. Os modelos cosmológicos contendo esses espinores conseguem reproduzir diversos resultados importantes, principalmente aqueles provenientes de modelos fantasmas [25, 26, 27], ou seja, modelos cosmológicos nos quais a equação de estado da energia escura possui um índice barotrópico ω tal que $\omega \leq 1$. Todavia, pouco se sabe sobre suas capacidades para se descrever cenários do Universo nos quais há uma interação no setor escuro.

Nesta dissertação serão considerados modelos cosmológicos para um Universo espacialmente plano contendo dois constituintes que interagem entre si, ditos matéria e energia escura. Os processos irreversíveis decorrentes dessa interação são levados em conta considerando-se uma pressão fora do equilíbrio bem como a existência de uma transferência de energia entre o campo de matéria e a energia escura. De fato, o interesse por modelos cosmológicos viscosos em cosmologias do tipo FLRW surgiu pela peculiar propriedade desses levarem a uma expansão acelerada do tipo fantasma na evolução tardia do Universo [28, 29]. Além disso, tais modelos podem amenizar uma série de problemas, como o problema da coincidência [30] e a questão do cruzamento da região fantasma [31].

O acoplamento do campo de matéria com a energia escura é motivado através dos seus índices barotrópicos efetivos, considerados como funções somente da razão entre suas densidades de energia, seguindo a linha de trabalho de [32]. Deste modo, o problema de se propor fenomenologicamente uma forma para o termo de interação entre matéria e energia escuras é evitado. A pressão dinâmica responsável pelos processos irreversíveis, por sua vez, é modelada segundo as estruturas da *termodinâmica de primeira ordem* (conhecida também como teoria de Eckart) [54] e da *teoria termodinâmica de segunda ordem ou causal* (dita também termodinâmica estendida) [56, 61].

As equações diferenciais descrevendo a dinâmica dos modelos são resolvidas e uma análise bayesiana é aplicada para se estabelecer os vínculos observacionais nos parâmetros livres. É verificada também a compatibilidade dos parâmetros observacionais usuais, ditos os parâmetros de densidade, o parâmetro de desaceleração e o módulo de distância teórico, com os dados experimentais existentes para o parâmetro de Hubble $H(z)$ [69], a fim de se verificar a viabilidade dos modelos.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: no capítulo 2 exibimos a base da Cosmologia moderna - a teoria da relatividade geral. Introduzimos em particular o conceito de curvatura e sua relação com a dinâmica de corpos na presença de campos gravitacionais. Em seguida, deduzimos as equações de campo de Einstein a partir

de um princípio variacional. No capítulo 3 abordamos os conteúdos referentes à Cosmologia. Comentamos sobre o *princípio cosmológico*, artefato este fundamental para o desenvolvimento do Modelo Padrão da Cosmologia, e os parâmetros observacionais comumente usados nas investigações cosmológicas. Por fim, descrevemos o cenário atual da Cosmologia frente às questões concernentes à natureza da matéria e energia escuras. No capítulo 4 introduzimos os conceitos básicos da teoria cinética relativística e deduzimos as expressões para a pressão dinâmica, responsável por processos fora do equilíbrio, nas teorias termodinâmicas de primeira e segunda ordens. No capítulo 5 realizamos uma breve introdução à Estatística. Descrevemos o conceito de probabilidade e a sua conexão com os testes de qualidade para modelos. Exibimos também os conceitos básicos da chamada inferência bayesiana, a qual é de uso corrente em Cosmologia. No capítulo 6 exibimos uma série de modelos cosmológicos contendo interações no setor escuro. Tal capítulo contém nossas contribuições originais. Em particular, enfatizamos as qualidades dos modelos viscosos e as dificuldades provenientes de uma descrição mais completa, segundo a termodinâmica estendida. Finalmente, nos capítulos 7 e 8 fornecemos nossas considerações finais bem como possíveis linhas de pesquisa para o futuro.

Capítulo 2

Relatividade Geral

Albert Einstein publicou em 1916 o seu primeiro artigo sobre a *teoria da relatividade geral* [33], no qual os princípios da relatividade restrita foram reformulados para uma estrutura teórica contendo também campos gravitacionais. Isto levou ao surgimento de uma teoria para a gravitação, na qual o campo gravitacional é resultado do aparecimento de uma curvatura do espaço-tempo devido à presença de matéria e energia.

O fundamento da relatividade geral está no chamado *princípio da equivalência*: em uma região suficientemente pequena para a qual o campo gravitacional dentro dela possa ser tomado como uniforme, em queda livre dentro desse campo, todas as leis da física são equivalentes àsquelas em um referencial inercial na ausência do campo gravitacional.

O conteúdo do princípio da equivalência pode ser expresso de modo matematicamente mais preciso através do *princípio da covariância geral*: as leis da física devem possuir a mesma forma em todos os referenciais. Em outras palavras, as equações devem possuir uma forma covariante (ou tensorial) [34]. De fato, o princípio da covariância geral tem como interpretação alternativa o fato de que a métrica é a única quantidade do espaço-tempo que pode aparecer explicitamente nas leis da física (sob a condição de que a conexão de Levi-Civita [36] ou conexão afim, para uma variedade livre de torção, deve ser simétrica) [35].

2.1 Dinâmica de uma partícula em Relatividade Geral

Consideremos uma partícula em queda livre em um campo gravitacional, descrita segundo o sistema de coordenadas ξ^α de um referencial inercial que também se encontra em queda livre. Tal referencial é evidentemente localmente inercial, no qual não é observada qualquer aceleração da partícula [34, 35]. Seguindo então o princípio da equivalência, as leis da relatividade restrita são válidas nesse sistema. As equações de movimento que descrevem partícula são então:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.1)$$

onde $d\tau^2 = ds^2/c^2$ é o tempo próprio medido no referencial localmente inercial.

Seja agora x^μ um sistema de coordenadas de um referencial em repouso em um campo gravitacional. Tendo em vista que a (2.1) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) = 0, \quad (2.2)$$

podemos empregar a regra da cadeia para escrever

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (2.3)$$

O desenvolvimento da derivada temporal leva a

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.4)$$

Empregando então o fato de que

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda \quad (2.5)$$

e multiplicando a (2.4) por $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$ obtém-se que

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.6)$$

onde Γ é a *conexão afim* ou *conexão de Levi-Civita* da variedade em consideração, cujas componentes são dadas por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}. \quad (2.7)$$

As componentes da conexão afim em um determinado sistema de coordenadas são também comumente chamadas como *símbolos de Christoffel*. É interessante observar que a (2.6) representa a equação de uma geodésica [37] segundo o sistema de coordenadas adotado. Além disso, supõe-se implicitamente que a conexão de Levi-Civita é simétrica.

Como as derivadas parciais de primeira ordem comutam, segue que a conexão afim é simétrica em relação aos índices inferiores:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (2.8)$$

Segundo o princípio da equivalência, as leis da relatividade especial são válidas em um referencial localmente inercial, e logo os efeitos decorrentes da presença do campo gravitacional não são perceptíveis. Todavia, quando passamos para um referencial em repouso nesse campo gravitacional, a equação de movimento (2.6) passa a exibir um termo extra em comparação à sua análoga no referencial localmente inercial (2.1). Tal termo representa justamente o efeito de curvatura do espaço-tempo, indicando a presença do campo gravitacional. Em outras palavras, o campo gravitacional está relacionado às propriedades geométricas do espaço-tempo.

Para um espaço-tempo geral, cuja estrutura matemática é descrita através de uma variedade de Lorentz [35], o elemento de comprimento (dita também a primeira forma fundamental dessa variedade) é escrito como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.9)$$

onde $g_{\mu\nu}$ são as componentes do *tensor métrico*, o qual é um campo tensorial simétrico por definição. Esse tensor é de extrema importância em relatividade geral; de fato, qualquer informação de natureza geométrica referente ao espaço-tempo é derivada dele. Por exemplo, o comprimento de arco para a *linha de universo* descrita pelo movimento da partícula entre dois pontos a e b e parametrizada pelo parâmetro τ ($x^\mu = x^\mu(\tau)$) é dado por

$$s = \int_a^b \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right)^{1/2} d\tau. \quad (2.10)$$

Um resultado geral da geometria diferencial é que as componentes $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ da conexão afim são expressas em termos das componentes do tensor métrico como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial g^{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g^{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right). \quad (2.11)$$

A demonstração desse resultado pode ser vista em [36]. Assim, dada a geometria do espaço-tempo em consideração (representada pela métrica $g_{\mu\nu}$) é possível calcular os símbolos de Christoffel e conseqüentemente obter a geodésica descrita pela partícula (via (2.6)).

Como a presença da matéria-energia produz um campo gravitacional e tendo em vista que a dinâmica de uma partícula pode ser relacionada, através do princípio de equivalência, à geometria do espaço-tempo (como sugere a (2.6)), existe então a possibilidade de se inferir que a matéria-energia *provoca* uma curvatura no espaço-tempo, a qual é sentida pela partícula como um campo gravitacional.

2.2 Curvatura

Na seção anterior fora mostrado que a dinâmica de uma partícula na presença de um campo gravitacional pode ser descrita através das propriedades geométricas do espaço-tempo em consideração. Em particular, fora comentado que a presença de fontes de matéria-energia provocam a curvatura do espaço-tempo. O objetivo desta seção é justamente investigar como o conceito de curvatura é traduzido numa linguagem matemática.

Seja M uma variedade diferenciável [36] representando um dado espaço-tempo. Uma *derivada covariante* ∇ em M é uma aplicação satisfazendo as propriedades de (i) linearidade e (ii) regra de Leibniz:

$$(i) \quad \nabla_\lambda(\alpha A_\nu^\mu + \beta B_\nu^\mu) = \alpha \nabla_\lambda A_\nu^\mu + \beta \nabla_\lambda B_\nu^\mu; \quad (2.12)$$

$$(ii) \quad \nabla_\rho(A_\nu^\mu B^\lambda) = (\nabla_\rho A_\nu^\mu) B^\lambda + A_\nu^\mu (\nabla_\rho B^\lambda); \quad (2.13)$$

Seja V^μ um campo vetorial contravariante na variedade M [35]. É possível mostrar que a sua derivada covariante é dada por [36]

$$\nabla_\lambda V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\kappa}^\mu V^\kappa. \quad (2.14)$$

Para um campo vetorial covariante V_μ , a derivada covariante é dada por

$$\nabla_\lambda V_\mu = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu V_\nu. \quad (2.15)$$

Um resultado importante é a nulidade da derivada covariante do tensor métrico:

$$\nabla_\nu g^{\mu\nu} = 0.$$

A demonstração disto pode ser vista, por exemplo, em [35]. O fato decorrente desse resultado é que se $g_{\mu\nu}$ é uma métrica plana, isto é, sua derivada covariante se anula em um referencial localmente inercial, então todos $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ se anulam em todos os outros sistemas de coordenadas, como consequência do princípio da covariância geral.

Uma importante propriedade da derivada covariante é que, diferentemente da derivada ordinária, ela não é comutativa. De fato, dado um campo vetorial $V^\mu \in M$ o comutador da derivada covariante é definido como [38]

$$[\nabla_\kappa, \nabla_\nu]V^\lambda = \nabla_\kappa \nabla_\nu V^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\kappa V^\lambda. \quad (2.16)$$

Usando então (2.14) o comutador da derivada covariante pode ser calculada e o resultado é

$$[\nabla_\kappa, \nabla_\nu]V^\lambda = \left(\frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\kappa} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} \right) V^\mu. \quad (2.17)$$

Existe então um campo tensorial $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ tal que para todo campo vetorial V^μ

$$[\nabla_\kappa, \nabla_\nu]V^\lambda = R^\lambda_{\mu\nu\kappa} V^\mu \quad (2.18)$$

O tensor de quarta ordem $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$ dado por

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\kappa} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} \quad (2.19)$$

é chamado de *tensor de curvatura de Riemann*.

Se m é um espaço-tempo plano, segue que $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = 0$ e conseqüentemente pela (2.19) o tensor de curvatura de Riemann se anula. Deste modo, observa-se que o tensor de curvatura realmente fornece a medida da curvatura do espaço-tempo.

O tensor de curvatura goza das seguintes propriedades:

- i) Anti-simetria com relação à permutação do primeiro par de índices: $R_{\mu\nu\kappa\lambda} = -R_{\nu\mu\kappa\lambda}$;
- ii) Anti-simetria com relação à permutação do segundo par de índices: $R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = -R^\lambda_{\mu\kappa\nu}$;
- iii) Simetria com relação à permutação dos pares de índices: $R_{\mu\nu\kappa\lambda} = R_{\kappa\lambda\mu\nu}$;

A contração do tensor de curvatura de Riemann com o tensor métrico define o chamado *tensor de Ricci*:

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}. \quad (2.20)$$

Este, por sua vez, contraído com o tensor métrico leva ao *escalar de curvatura* (conhecido também como *escalar de Ricci*):

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}. \quad (2.21)$$

Empregando o tensor de Ricci bem como o escalar de curvatura é possível contruir um tensor simétrico

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.22)$$

conhecido com *tensor de Einstein*. De fato, como será visto mais adiante, esse tensor é justamente o termo representando a geometria do espaço-tempo que aparece nas equações de campo de Einstein. Além disso, ele satisfaz as *identidades contraídas de Bianchi*,

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (2.23)$$

as quais estão associadas às leis de conservação na relatividade geral.

2.3 Tensor energia-momentum

Consideremos uma distribuição de matéria no espaço-tempo de Minkowski. Em relatividade especial tal distribuição é descrita em termos de um tensor simétrico $T_{\mu\nu}$ conhecido com *tensor energia-momentum*. De fato, esse tensor pode ser visto como sendo a carga conservada relacionada a simetrias por translações espaciais da ação que descreve um dado sistema físico [39] (lembrando que o grupo de transformações no espaço-tempo da relatividade especial contendo translações é o *grupo de Poincaré*). Para um dado observador com quadrivelocidade u^μ ,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.24)$$

a grandeza $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ é interpretada como a densidade de energia medida por esse observador. Para um campo de matéria, essa quantidade é sempre positiva:

$$T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0. \quad (2.25)$$

Além disso, se x^μ é ortogonal a u^μ , a quantidade $-T_{\mu\nu}u^\mu x^\nu$ pode ser interpretada como a densidade de momentum do campo de matéria na direção x^μ .

Em relatividade especial, um *fluido perfeito* é definido como uma distribuição de matéria para a qual o tensor energia momentum é

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p \eta_{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

onde ρ e p são a densidade e a pressão do fluido medidas no referencial de repouso, respectivamente, $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo de Minkowski, c é a velocidade da luz no vácuo e u_μ é um campo vetorial unitário do tipo tempo representando a quadrivelocidade do fluido. O fluido é dito “perfeito” devido a ausência de termos de condução de calor e efeitos de viscosidade.

No caso da relatividade geral, a quadrivelocidade u^μ de uma partícula é definida como sendo o vetor tangente unitário à sua linha de universo, de modo que uma partícula livre satisfaz a equação geodésica de movimento

$$u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0. \quad (2.27)$$

O tensor energia-momentum $T_{\mu\nu}$ no espaço-tempo curvo representa agora o fluxo de quadrimomento p^μ através de uma hipersuperfície que encerra as fontes de campo. Tal tensor é simétrico e suas componentes possuem interpretações físicas bem definidas: a componente T_{00} é a densidade de energia, as componentes espaço-temporais T_{0i} e T_{i0} constituem os fluxos de enrgia e momentum enquanto as componentes T_{ij} representam os termos de pressão. A lei de conservação para o tensor energia-momentum é dada pela equação de movimento

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.28)$$

O tensor energia-momentum para um fluido perfeito é novamente

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (2.29)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é agora a métrica para um espaço-tempo curvo.

Na seção a seguir veremos que o tensor energia-momentum aparece nas equações de campo de Einstein, representando a fonte matéria-energia que influencia a geometria do espaço-tempo.

2.4 As equações de campo de Einstein

Vimos anteriormente que a presença de matéria afeta diretamente a geometria do espaço-tempo. Desejamos agora obter a equação que descreve esta relação. Para tanto, utilizaremos um princípio variacional para a relatividade geral [35, 38].

A ação total S_T para a gravitação é dada por

$$S_T = S_G + S_m = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (2.30)$$

onde \mathcal{L}_m é a densidade lagrangiana da matéria, g é o determinante da matriz que representa a métrica e G é a constante da gravitação universal de Newton. A primeira parcela da soma no lado direito da equação representa S_G , a *ação de Einstein-Hilbert*, enquanto o segundo descreve a ação da matéria S_m .

A variação da ação (2.30) com respeito as componentes $g_{\mu\nu}$ da métrica leva a

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

onde o tensor energia-momentum é definido por

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.32)$$

As equações (2.31) são conhecidas como as *equações de campo de Einstein*. O lado direito descreve a distribuição de matéria enquanto o lado esquerdo representa a resposta da geometria do espaço-tempo à presença de tal distribuição. Devido às identidades de Bianchi (2.22) o lado direito das equações de campo possui uma derivada covariante nula, o que é consistente com a lei de conservação (2.28).

É interessante observar que a adição de um termo linear em $g_{\mu\nu}$ ao lado direito das equações de campo (2.31) ainda satisfaz as identidades de Bianchi. Deste modo, as equações de Einstein podem ser escritas de maneira mais geral como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.33)$$

onde Λ é a chamada *constante cosmológica*, introduzida originalmente por Einstein para descrever um Universo estático. Como veremos mais adiante, ela possui ainda um papel muito importante no contexto da energia-escura.

Capítulo 3

Cosmologia

As especulações sobre a natureza do Universo remontam aos tempos pré-históricos, fornecendo à astronomia assim o caráter da mais antiga das ciências. Os registros astronômicos antigos datam de aproximadamente 3000 a.C. e são devidos aos chineses, babilônicos, assírios e egípcios. Naquela época, o estudo dos astros era motivado basicamente por aplicações práticas, como a medida da passagem do tempo (confeção de calendários).

Embora seja possível discutir sobre os conceitos cosmológicos no contexto da gravitação newtoniana [40], a teoria da relatividade geral de Einstein fornece um aparato teórico mais rico para se descrever a evolução do Universo, o qual propicia a discussão de questões mais complexas como a natureza da geometria e topologia do Universo [41]. As soluções de suas equações de campo permitem um Universo dinâmico, cuja corroboração experimental viera em 1929 com a constatação por Edwin Hubble de que o Universo estava em expansão.

Com o progresso tecnológico, as observações astronômicas se tornaram cada vez mais precisas, fornecendo evidências sobre o Universo como um todo e propiciando a formulação do *princípio cosmológico* [41]: o Universo é homogêneo e isotrópico em larga-escala. Outro resultado de extrema importância para a Cosmologia é a constatação experimental da existência de uma *radiação cósmica de fundo*, originalmente predita por Gamow, Alpher e Herman em 1948 [42, 43], oriunda da época na qual houve o desacoplamento da radiação com a matéria. Todas essas evidências observacionais corroboraram para que a Cosmologia se firmasse como uma Ciência.

3.1 Princípios básicos da Cosmologia

A observação astronômica mais relevante para a Cosmologia fora a conclusão por Edwin Hubble de que o Universo está em expansão. Em 1929, investigando a luz emitida por galáxias distantes, Hubble observou que todos objetos longínquos afastavam-se de nós [41]. A velocidade de recessão desses objetos era proporcional à sua distância em relação a nós, sendo descrita pela *lei de Hubble*

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r}, \quad (3.1)$$

onde H_0 é a *constante de Hubble*, que mede a taxa de expansão do Universo no tempo atual, cujo melhor valor experimental é $72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [46].

Para facilitar a descrição, introduzimos um sistema de coordenadas que acompanhe a expansão do Universo, ou seja, que esteja fixo numa determinada galáxia, a partir da qual observamos a expansão. Tais coordenadas são ditas *comóveis* e se relacionam com a distância real r por

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}, \quad (3.2)$$

onde x representa a distância comóvel (que é constante no tempo) e $a = a(t)$ é o *fator de escala cósmico*, o qual descreve efetivamente a expansão do Universo. Observemos que a escolha do ponto de observação, para o qual as coordenadas comóveis são definidas, é completamente arbitrária. Isto reflete justamente uma consequência do princípio cósmológico: o Universo em larga escala se parece o mesmo quando visto de qualquer ponto.

Calculando a derivada temporal da (3.2) obtemos o resultado geral

$$\mathbf{v} = H\mathbf{r}, \quad (3.3)$$

que é análogo à equação (3.1) sendo, porém, válido para qualquer instante de tempo. O fator H nessa equação, que mede basicamente a taxa de expansão do Universo em um dado instante de tempo, é chamado de *parâmetro de Hubble*, sendo ele expresso em termos do fator de escala $a(t)$ como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.4)$$

É evidente que a constante de Hubble H_0 se trata do parâmetro H calculado no tempo atual.

As velocidades com as quais os objetos se afastam de nós são usualmente medidas em termos do *redshift* z , definido como

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \approx \frac{v}{c}, \quad (3.5)$$

onde λ_{em} é o comprimento de onda emitido originalmente pelo objeto luminoso e λ_{obs} é o comprimento de onda observado. Diferentemente do efeito Doppler usual, cuja origem é cinemática, a variação no comprimento de onda observado se deve exclusivamente à expansão do Universo. Neste caso, podemos relacionar o redshift ao fator de escala através de

$$\frac{a(t_{obs})}{a(t_{em})} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = 1 + z. \quad (3.6)$$

Em geral é costume adotar-se $a(t_{obs}) = 1$, o que é equivalente a reescalar as coordenadas comóveis através do tamanho atual do Universo.

3.2 Métrica de Robertson-Walker

O físico-matemático americano Howard Percy Robertson e o matemático inglês Arthur Geoffrey Walker demonstraram, em 1935 e 1936, que a métrica mais geral que satisfaz as condições de homogeneidade e isotropia para o Universo é a chamada *métrica de Robertson-Walker*:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (3.7)$$

A constante k que aparece nesta equação é chamada de *constante de curvatura* e seus valores determinam as seguintes geometrias para o Universo (consistentes com o princípio cosmológico):

$$\begin{cases} k = 0, & \text{geometria plana;} \\ k > 0, & \text{geometria esférica;} \\ k < 0, & \text{geometria hiperbólica.} \end{cases}$$

Tendo em vista que (2.9) expressa a forma mais geral de um intervalo infinitesimal em um espaço-tempo curvo, podemos, através de uma comparação direta com a (3.7), determinar explicitamente as componentes do tensor métrico. São elas então

$$g_{00} = g^{00} = 1, \quad g_{11} = \frac{-a^2}{1 - kr^2} = \frac{1}{g^{11}}, \quad g_{22} = -a^2 r^2 = \frac{1}{g^{22}}, \quad (3.8)$$

$$g_{33} = -a^2 r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{g^{33}}, \quad g = \frac{a^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}. \quad (3.9)$$

Em uma representação matricial, o tensor métrico é escrito como

$$g_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Os símbolos de Christoffel podem agora ser calculados a partir da equação (2.11):

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{a}a}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{22}^0 = \frac{\dot{a}ar^2}{c}, \quad \Gamma_{33}^0 = \frac{\dot{a}ar^2 \sin^2 \theta}{c}, \quad \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{1}{c} \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.11)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta, \quad (3.12)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{23}^3 = \cot \theta. \quad (3.13)$$

Com os valores de $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ em mãos, podemos calcular as componentes do tensor de Ricci. Pelas equações (2.19) e (2.20) teremos

$$R_{00} = \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{11} = -\frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k}{c^2(1 - kr^2)}, \quad R_{22} = -\frac{(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2}{c^2}, \quad (3.14)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta, \quad R = \frac{6}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right), \quad (3.15)$$

onde R é o escalar de curvatura (2.21). As demais componentes do tensor de Ricci são nulas.

O conhecimento do escalar de curvatura bem como das componentes do tensor de Ricci nos permite determinar as componentes não-nulas do tensor de Einstein (2.22):

$$G_{00} = -\frac{3}{c^2} \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right), \quad G_{11} = \frac{2\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + k}{c^2(1 - kr^2)}, \quad (3.16)$$

$$G_{22} = G_{11} r^2 (1 - kr^2), \quad G_{33} = G_{22} \sin^2 \theta. \quad (3.17)$$

3.3 Tensor energia-momentum na métrica de Robertson-Walker

Na seção anterior determinamos os elementos que constituem o lado esquerdo das equações de campo de Einstein (2.31). Precisamos agora determinar a forma do lado direito dessas equações, o qual está diretamente relacionada ao tensor energia-momentum.

Consideremos então que as fontes do campo gravitacional são um fluido perfeito, para o qual o tensor energia-momentum é dado por

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g_{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Como um sistema de coordenadas comóvel fora adotado para se escrever as componentes da métrica, o qual se move concomitantemente com o fluido, a quadrivelocidade do fluido terá a forma $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$; logo, o tensor energia-momentum para um fluido perfeito na métrica de Robertson-Walker assume a forma

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pa^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

3.4 A equação de Friedmann e a Cosmologia Padrão

O objetivo desta seção é obter equações que descrevam a dinâmica do Universo. Para tanto, empregaremos a forma mais geral das equações de campo de Einstein (3.20) e utilizaremos as componentes dos tensores de Einstein, energia-momentum e métrico juntamente com a forma do escalar de curvatura.

As componentes temporais dos tensores levam a

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R + \Lambda g_{00} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00}, \quad (3.20)$$

equação esta que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (3.21)$$

Esta equação é conhecida como *equação de Friedmann* [38, 41] e ela é de extrema importância em Cosmologia, pois descreve a evolução temporal do Universo. Dado então o conteúdo material do Universo, representado pela densidade de energia ρ , a solução dessa equação nos fornece a descrição de sua evolução com o tempo.

Tomando as componentes espaciais dos tensores na equação (2.31),

$$R_{ii} - \frac{1}{2} g_{ii} R + \Lambda g_{ii} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ii}, \quad (3.22)$$

obtemos a equação

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} p - \frac{kc^2}{a^2} + \Lambda c^2, \quad (3.23)$$

a qual pode, por intermédio da equação de Friedmann (3.21), ser reescrita como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (3.24)$$

Esta equação é conhecida como *equação da aceleração* [38, 41]. O sinal negativo na equação (3.24) pode ser entendido no seguinte sentido: dada uma pressão para o material, há um aumento da força gravitacional e conseqüentemente uma desaceleração da expansão.

Para resolvermos as equações descritas acima é necessário fornecer a evolução temporal de ρ e p . Isto pode ser obtido efetivamente através da lei de conservação (2.28):

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + \frac{p}{c^2}) = 0. \quad (3.25)$$

Esta equação é chamada de *equação do fluido*, sendo ela de fisicamente análoga à equação da continuidade. Todavia, é importante salientar que ela **não** é independente das equações (3.21) e (3.24). Por outro lado, conhecendo-se a relação entre ρ e p , dada usualmente através de uma *equação de estado* da forma $\rho \equiv \rho(p)$, é possível se resolver a equação (3.25) a fim de se obter a relação entre a densidade de energia e o fator de escala cósmico.

É muito comum em Cosmologia a utilização de equações de estado da forma [41]

$$p = c^2 \omega \rho, \quad (3.26)$$

onde ω é uma constante que especifica a natureza do constituinte, denominadas *equações de estado barotrópicas*. Os casos mais comuns são: $\omega = 1/3$, que descreve a radiação; $\omega = 0$, que representa a matéria diluída, dita também *poeira cósmica*; $\omega = -1$, representando a *energia de vácuo*.

Considerando que os constituintes do Universo não interagem entre si, cada um deles estará sujeito a uma equação de conservação da forma (3.25) separadamente. Deste modo, para a poeira cósmica ($p_m = 0$) teremos

$$\rho_m \propto a^{-3}; \quad (3.27)$$

no caso da radiação, para a qual $p_r = c^2 \rho/3$ segundo a eletrodinâmica clássica, obtemos

$$\rho_r \propto a^{-4}; \quad (3.28)$$

finalmente para a energia de vácuo ($\omega = -1$ na equação (3.26)) temos

$$\rho_\Lambda = \text{constante}, \quad (3.29)$$

que está relacionada à constante cosmológica, como veremos a seguir.

Voltemos às equações de campo (3.20). Escrevendo-as na forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.30)$$

e interpretando o segundo termo do lado direito da equação resultante como

$$T_{\mu\nu}^\Lambda = \frac{c^4}{8\pi G}\Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.31)$$

obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^\Lambda). \quad (3.32)$$

Comprando agora a forma de $T_{\mu\nu}^{\Lambda}$ com aquela para o tensor energia-momentum de um fluido perfeito, obtemos $\rho_{\Lambda} = -p_{\Lambda}/c^2 = c^2\Lambda/8\pi G = \text{constante}$, em conformidade com (3.29).

Conhecida a relação entre ρ e o fator de escala cósmico $a = a(t)$, é possível obter a dependência temporal deste último através da solução da equação de Friedmann. Todavia, cabe aqui primeiro uma análise mais detalhada a respeito da constante cosmológica e sua original motivação.

Um ano depois de publicar o seu primeiro trabalho sobre a teoria da relatividade geral, em 1917, Einstein publicou seu artigo histórico sobre Cosmologia, *Considerações Cosmológicas sobre a Teoria da Relatividade*, em que construía um modelo esférico para o Universo. Como as equações de campo da relatividade geral não impediam diretamente a existência de soluções para um Universo dinâmico, dificuldade esta também encontrada na teoria de Newton da gravitação, Einstein modificou suas equações através da introdução de uma constante cosmológica, a qual permitia a obtenção de soluções descrevendo um Universo estático. A constante cosmológica age como uma força repulsiva que previne o colapso do Universo pela atração gravitacional.

Anos mais tarde, entre 1922 e 1924, o matemático e meteorologista russo Alexander Alexandrovitch Friedmann (1888-1925) e o padre, engenheiro civil e cosmólogo belga Georges-Henri Édouard Lemaître (1894-1966), mostraram, em trabalhos independentes, que era possível obter uma família de soluções para as equações de campo de Einstein que descreviam um Universo em expansão. Por esse motivo, são eles hoje conhecidos como os pais da Cosmologia. As soluções obtidas incluíam a expansão eterna ou o recolapso. Estas correspondiam justamente às possíveis geometrias na métrica de Robertson-Walker (3.7). Por esse motivo, é comum na literatura referir-se a esta como *métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*.

Em 1929, o astrônomo americano Edwin Powell Hubble (1889-1953), usando o telescópio do Monte Wilson, na Califórnia, demonstrou, observando o redshift das linhas espectrais de galáxias originalmente observadas por Milton La Salle Humason (1891-1972) e medindo suas distâncias, que as galáxias afastavam-se com velocidades proporcionais à sua distância, como mencionado na seção 3.1. Isto constituiu a primeira evidência experimental de que o Universo estava em expansão, comprovando as previsões teóricas de Friedmann e Lemaître. Aceitando os resultados observacionais, Einstein posteriormente afirma que introdução de uma constante cosmológica fora o seu maior engano na Física. Por esse motivo, o modelo padrão da Cosmologia admite que $\Lambda = 0$.

Tendo visto a real motivação por trás da constante cosmológica, podemos proceder com a obtenção de $a(t)$. Na época em que o fator de escala era pequeno, é possível observar através de uma inspeção da equação de Friedmann (3.21) que o termo da densidade de energia ($\rho = \rho_m + \rho_r$) domina sobre o termo de curvatura, conforme as equações (3.27) e (3.28). Neste caso, a equação pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (3.33)$$

As soluções desta equação são facilmente obtidas quando consideramos a época em que a matéria domina sobre a radiação e vice-versa. Assim quando a matéria dominava, temos a solução

$$a(t) \propto t^{2/3}. \quad (3.34)$$

Para a era da radiação obtemos

$$a(t) = t^{1/2}. \quad (3.35)$$

É interessante observar que quando $t \rightarrow 0$ nas soluções acima temos $a \rightarrow 0$ e, pelas equações (3.27) e (3.28), $\rho \rightarrow \infty$. Isto significa que temos uma *singularidade* no passado, a qual denominamos de Big Bang. Segundo então as soluções do modelo padrão, o Universo se originou de um ponto de densidade e temperatura infinitas, resfriando-se conforme se expandia. De fato, a previsão teórica dessa singularidade no início do Universo fora dada através dos famosos *teoremas de singularidade*, devidos a aos físicos ingleses Stephen Hawking e Roger Penrose [35]. A existência dessa singularidade, por outro lado, impede que as leis da Física usuais possam ser utilizadas, tendo em vista que estamos lidando com escalas de comprimento de Planck (10^{-34} m). Nesta escala, os efeitos quânticos tornam-se relevantes. Dessa maneira, o Big Bang deve necessariamente ser visto como um limite de validade para a Cosmologia Padrão.

3.5 Parâmetros observacionais

É comum em Cosmologia o estabelecimento de diversos parâmetros observacionais, os quais servem basicamente para se determinar se um dado modelo é adequado para descrever o Universo ou não. O objetivo desta seção é então apresentar tais parâmetros e discutir suas aplicações.

3.5.1 Densidade crítica e parâmetro de densidade

O parâmetro de densidade é uma ferramenta muito útil para se expressar a densidade das variadas componentes que constituem o Universo.

Retornemos então à equação de Friedmann. Reconhecendo que $H = \dot{a}/a$, escrevemos a equação (3.21) como

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (3.36)$$

lembrando que $\Lambda = 0$ em Cosmologia Padrão. A *densidade crítica* ρ_c é definida então como sendo a densidade para a qual a geometria do Universo é plana, isto é, $k = 0$. Neste caso, da (3.36) obtemos que

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}. \quad (3.37)$$

Com os valores atuais da constante de Hubble, estima-se que a densidade crítica seja hoje em dia da ordem de 10^{-26} kg m⁻³. A partir desse valor, inferimos se o Universo é fechado ou aberto. Se $\rho > \rho_c$, sabemos que o Universo é fechado (geometria esférica); caso $\rho < \rho_c$, teremos um Universo aberto (geometria hiperbólica).

O *parâmetro de densidade* Ω_i do i -ésimo constituinte do Universo é definido pela razão

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}. \quad (3.38)$$

Empregando então as equações (3.37) e (3.38) podemos reescrever a equação de Friedmann (3.36) como

$$\Omega_{total} = 1 + \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.39)$$

onde Ω_{total} é a soma dos parâmetros de densidade de todos os constituintes do Universo. É possível observar que se $k = 0$ nessa equação, $\Omega_{total} = 1$, para qualquer instante de tempo.

3.5.2 Parâmetro de desaceleração

Após a constatação experimental de que o Universo está em expansão, cuja taxa é medida essencialmente pelo parâmetro de Hubble $H = \dot{a}/a$, observou-se também que essa taxa variava com o tempo. A fim de se quantificar essa variação, introduz-se o chamado *parâmetro de desaceleração* q , definido por

$$q = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{2} \left(1 + 3 \frac{p}{\rho} \right). \quad (3.40)$$

Dessa definição decorre que se q é positivo, significa que o Universo expande-se desaceleradamente; quando q é negativo, tal expansão é acelerada.

O sinal negativo na definição do parâmetro de desaceleração reflete o fato de que o modelo padrão da Cosmologia prevê uma expansão desacelerada para o Universo, se este for composto somente de matéria bariônica. Todavia, como veremos adiante, a observação de supernovas do tipo Ia mostram que o Universo está em um regime acelerado de expansão, e a descrição teórica de tal fato será obtida somente com a inclusão de um constituinte extra, a *energia escura*.

3.5.3 Módulo de distância teórico

Um parâmetro de muita importância para Cosmologia é o *módulo de distância teórico*, definido como

$$\mu_0 = m - M = 25 + 5 \log_{10} d_L, \quad (3.41)$$

onde m é a magnitude visual (ou aparente), que é o brilho de um astro medido por um observador na Terra, M a magnitude bolométrica, isto é, a magnitude correspondente a observação de toda a faixa espectral emitida pelo astro [40] e d_L é a *distância de luminosidade*, dada por

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (3.42)$$

onde $H(z)$ é o parâmetro de Hubble expresso como uma função do redshift. O módulo de distância teórico é comumente empregado para se estabelecer vínculos em parâmetros livres dos modelos para o Universo.

3.5.4 Distância de luminosidade

A distância de luminosidade é interpretada fisicamente como a quantidade de luz proveniente de um objeto que chega até nós, permitindo-nos determinar a distância desse objeto. Para tanto, assume-se que a intensidade luminosa cai com o quadrado da distância ao objeto [41].

A distância de luminosidade pode ser definida em termos da luminosidade absoluta L (potência total da fonte) e sua correspondente luminosidade aparente l (potência por unidade de área recebida pelo observador):

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}}. \quad (3.43)$$

Para um espaço euclidiano, a luminosidade aparente é dada por $l = L/4\pi d$, onde d denota a distância do objeto ao observador. Em escala cosmológica, no entanto, é necessário levar em conta o efeito Doppler e o redshift. Cada efeito leva a um fato de atenuação da forma $1/a(t) = 1 + z$, de modo que $l = L/4\pi d(1 + z)^2$.

Considerando um espaço plano ($k = 0$) e uma propagação radial ($d\theta = d\phi = 0$) para a luz numa métrica de Robertson-Walker (3.7), o cálculo da distância d pode ser feito através da (2.10), obtendo-se assim $d = a(t)r$, onde r é a distância comóvel percorrida pela luz. Para o presente escrevemos que

$$d_L = a_0 r_0 (1 + z)^2. \quad (3.44)$$

Para calcular r_0 impomos $ds = 0$ (pois estamos calculando a distância comóvel percorrida pela luz), de onde obtemos que $cdt/a(t) = dr$. Efetuando uma mudança de variáveis e integrando obtemos

$$r_0 = c \int_0^{z'} \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.45)$$

Conseqüentemente a distância de luminosidade assume a forma

$$d_L = c(1 + z) \int_0^{z'} \frac{dz'}{H(z')}, \quad (3.46)$$

onde assumimos $a_0 = 0$.

3.6 Sobre a matéria escura

Como mencionado na introdução, evidências provenientes da observação das curvas de rotação de galáxias espirais sugerem que pode existir um conteúdo material a mais do que aquele atribuído à matéria bariônica. Nesta seção discutiremos esse assunto em mais detalhes.

Uma curva de rotação exhibe basicamente a velocidade da matéria que gira em um disco espiral como função da distância ao centro da galáxia. Segundo a mecânica newtoniana, se uma galáxia possui massa $M(R)$ dentro de um raio R , a sua velocidade de rotação será

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}, \quad (3.47)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton. Em outras palavras, para grandes valores de R , a velocidade de rotação deve decrescer proporcionalmente a $1/R^{1/2}$.

Porém, como indicado na figura 3.1 [44], a velocidade observada é muito maior do que aquela prevista pela gravitação newtoniana, indicando a presença de alguma outra forma de matéria ainda não detectada. A essa matéria desconhecida é dado o nome de *matéria escura*. Além desse resultado observacional, medidas realizadas em galáxias elípticas sugerem a existência da matéria escura através do fenômeno de lentes gravitacionais [38]. De fato, medidas na faixa do raio-x revelam a presença de atmosferas de gás quente que preenchem os halos escuros de galáxias elípticas isoladas e cujo suporte hidrostático fornece evidência para a matéria escura [45].

Existem diversos candidatos à matéria escura [41]. Entre eles citamos em particular os neutrinos, cujas propriedades físicas são pouco conhecidas hoje, as partículas naturais de teorias supersimétricas [39], como os fotinos,

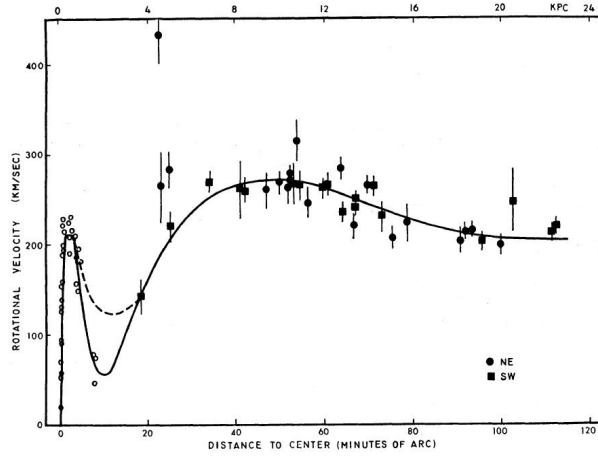


Figura 3.1: Curva de rotação medida para a nebulosa de Andrômeda. É possível observar que a velocidade de rotação permanece relativamente constante com o aumento da distância em relação ao centro da galáxia. Gráfico adaptado de V. Rubin, W. K. Ford Jr, *Astrophys. J.* **159**, 359, (1970).

neutralinos e gravitinos, e os objetos de halo compactos e massivos (também conhecidos como MACHOs, do inglês *Massive Compact Halo Objects*), um termo genérico para designar objetos compactos, de natureza bariônica ou não-bariônica, observados em halos galácticos. As anãs marrons são um bom exemplo desses objetos.

3.7 Energia escura e o modelo Λ CDM

Medidas observacionais sugerem que $\Omega_{total} \approx 1$, porém os constituintes conhecidos não são capazes de atribuir ao parâmetro de densidade tal valor. Enquanto as medidas do satélite WMAP mostram que $\Omega_{total}^0 = 1,02 \pm 0,02$ [47], onde o índice 0 indica o valor atual da grandeza, a matéria e a radiação, juntamente com a matéria escura, totalizam $\Omega_m^0 + \Omega_r^0 + \Omega_{dm}^0 \approx 0,28$ [48]. Conseqüentemente, deve existir um novo constituinte que permeia o Universo, denominado hoje de *energia escura*.

A necessidade de um componente extra advém também da constatação experimental, proveniente de observações de supernovas do tipo Ia, de que o Universo está em expansão acelerada [49]. Como mencionado na seção 3.5, o modelo padrão da Cosmologia prevê sempre um Universo que se expande desaceleradamente. É necessário então a existência de algum componente a mais, capaz de dirigir a expansão para tal regime. Tal componente é justamente a energia escura.

Uma alternativa para explicar a expansão acelerada é supor que a constante cosmológica se comporta como energia escura, de tal modo que teríamos um Universo composto por ela, radiação e matéria. A tal modelo é dado o nome Λ CDM, onde Λ designa a constante cosmológica e a sigla CDM (do Inglês, *Cold Dark Matter*) se refere à matéria bariônica mais a matéria escura (suposta não-relativística).

A concordância experimental exibida por este modelo frente aos dados observacionais é muito boa. De fato, ele se adequa muito bem às curvas para o módulo de distância teórico μ_0 bem como com as mediads para a anisotropia da radiação cósmica de fundo. Todavia, o modelo Λ CDM exhibe algumas dificuldades. A principal delas é chamada de *problema da constante cosmológica*. Em um modelo inflacionário para o Universo [50], a densidade de energia

associada à constante cosmológica no período primordial é $\rho_\Lambda \approx 10^{95}$, em quilogramas por metro cúbico, enquanto o valor atual é $\rho_\Lambda^0 \approx 10^{-26}$. Assim $\rho_\Lambda/\rho_\Lambda^0 \approx 10^{120}$. Como o valor da constante cosmológica é proporcional à sua densidade de energia, o seu valor atual difere de 120 ordens de grandeza daquele no período inflacionário.

Além do problema acima, vários outros fatos observacionais motivaram o estudo de modelos cosmológicos alternativos para o Universo contendo energia escura. Em particular, considerações provenientes da física de partículas [51, 52] bem como observações feitas sobre feixes de raios gama [53] sugerem que a matéria e a energia escuras estão acopladas, não evoluindo separadamente. A necessidade de se obter modelos que se adequem a esses fatos precursam as pesquisas sobre a energia escura hoje.

Capítulo 4

Teoria Cinética Relativística

Como citado na Introdução, o objetivo deste trabalho é exibir modelos cosmológicos contendo interações no setor escuro. No caso não-viscoso, a modelagem matemática é simplificada, tendo em vista que processos irreversíveis não estão presentes. Todavia, para um Universo contendo fluidos viscosos, esse cenário é modificado. Em verdade, os efeitos provenientes de uma pressão dinâmica se tornam extremamente relevantes.

Estaremos interessados aqui em basicamente duas descrições: a *teoria de Eckart*, ou *teoria termodinâmica de primeira ordem*, e a *termodinâmica estendida*, conhecida também como *teoria termodinâmica de segunda ordem* ou *causal*. As diferenças concernentes a essas descrições serão enfatizadas, sendo elas de vital importância para os modelos que aqui estudaremos. A exposição do conteúdo seguirá a linha de [54] e [56]. Alguns fatos históricos são exibidos, porém, em [57].

4.1 Teoria de Eckart

No domínio não-relativístico da teoria cinética dos gases, um gás monoatômico simples é descrito através de uma teoria de treze campos: a densidade do número de partículas, as componentes da velocidade, a temperatura, as componentes do deviante do tensor pressão e as componentes do vetor fluxo de calor. Para um gás relativístico, no entanto, é possível mostrar que há mais uma quantidade não-nula [54], a pressão dinâmica, que deve ser incluída na descrição. Deste modo, temos uma teoria contendo quatorze campos a serem determinados. Para os nossos propósitos, porém, desejamos apenas obter uma equação constitutiva para a pressão dinâmica e é neste aspecto que voltamos a nossa atenção nesta seção.

Recordemos que uma métrica consistente com o princípio cosmológico, isto é, com a isotropia e a homogeneidade em larga escala do Universo, é a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker espacialmente plana:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2] . \quad (4.1)$$

Por simplicidade, expressamos a parte espacial da métrica como aquela de um espaço euclidiano. As componentes não-nulas do tensor métrico e dos símbolos de Christoffel são:

$$g_{00} = 1, \quad g_{ij} = -a^2 \delta_{ij}, \quad g = a^6, \quad \Gamma_{ij}^0 = \dot{a} a \delta_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij}, \quad (4.2)$$

onde o ponto corresponde à derivação com respeito ao tempo cósmico. Desejamos agora obter basicamente a expressão da pressão dinâmica para essa métrica.

A equação de Boltzmann na presença de campos gravitacionais pode ser escrita como [54]

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^i p^\mu p^\nu \frac{\partial f}{\partial p^i} = -\frac{u_L^\mu p_\mu}{c^2 \tau} (f - f^0). \quad (4.3)$$

Nesta equação, p^μ é o quadrimomento das partículas do gás, f é sua função de distribuição e f^0 denota a função de distribuição de Maxwell-Jüttner. Adotamos aqui o modelo de Anderson e Witting [55], de modo que o termo de produção (lado direito da equação de Boltzmann) é escrito como

$$Q(f, f^0) = -\frac{u_L^\mu p_\mu}{c^2 \tau} (f - f^0). \quad (4.4)$$

Aqui u^μ denota a quadrivelocidade na descrição de Landau-Lifshitz. Como estamos lidando com uma métrica para um Universo homogêneo e isotrópico, podemos considerar um sistema de coordenadas comóvel para o qual $u_L^\mu = (c, \mathbf{0})$ no espaço euclidiano. Neste caso, podemos desprezar todos os gradientes e a equação de Boltzmann (4.3) passa a ser escrita como

$$\frac{\partial f}{\partial x^0} - 2 \frac{\dot{a}}{a} p^i \frac{\partial f}{\partial p^i} = -\frac{1}{c\tau} (f - f^0). \quad (4.5)$$

Empregaremos aqui o método de Chapman-Enskog. Deste modo, procuraremos solução da equação de Boltzmann da forma

$$f = f^0(1 + \phi), \quad (4.6)$$

onde ϕ é o desvio da função de distribuição de Maxwell-Jüttner. Para um gás não-degenerado ela é escrita como

$$f^0 = \frac{n}{4\pi m^2 c k_B T K_2(\xi)} \exp\left[\frac{cp_0}{k_B T}\right], \quad \xi = \frac{mc^2}{k_B T}, \quad (4.7)$$

onde m é a massa em repouso das partículas que constituem o gás, $K_2(\xi)$ é a função de Bessel modificada de segunda espécie, n é a densidade do número de partículas e k_B é a constante de Boltzmann. Além disso, segundo a métrica dada temos

$$p_0 = \sqrt{m^2 c^2 + a^2 |\mathbf{p}|^2},$$

com $|\mathbf{p}|^2 = \delta_{ij} p^i p^j$.

Empregando a conhecida expansão

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m, \quad (4.8)$$

onde x é um operador, podemos resolver a equação de Boltzmann e obter

$$f = \sum_{l=0}^{\infty} \left[-c\tau \left(\frac{\partial}{\partial x^0} - 2 \frac{\dot{a}}{a} p^i \frac{\partial}{\partial p^i} \right) \right]^l f^0. \quad (4.9)$$

É importante notar que a série (4.8) é convergente se, e somente se, a norma de x é menor do que a unidade. Logo, a expansão resultante é em geral assintótica para $\tau \rightarrow 0$. Considerando apenas termos em primeira ordem de $c\tau$ na equação (4.9) teremos

$$f = f^0 - c\tau \left(\frac{\partial}{\partial x^0} - 2 \frac{\dot{a}}{a} p^i \frac{\partial}{\partial p^i} \right) f^0, \quad (4.10)$$

ou ainda

$$f = f^0 \left\{ 1 - c\tau \left[\frac{\dot{n}}{n} + \left(1 - \xi \frac{K_3}{K_2} \right) \frac{\dot{T}}{T} + \frac{c}{k_B T} p_0 \frac{\dot{T}}{T} + \frac{c}{k_B T} \frac{\dot{a}}{a} \frac{|\mathbf{p}|^2}{p_0} \right] \right\}, \quad (4.11)$$

onde empregamos a função de distribuição de Maxwell-Jüttner.

A partir da função de distribuição fora do equilíbrio (4.11) podemos calcular a projeção do tensor energia-momentum em um referencial comóvel, que corresponde justamente à soma entre a pressão hidrostática p , de equilíbrio, e a pressão dinâmica ϖ , associada a fenômenos fora do equilíbrio,

$$p + \varpi = -\frac{1}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{u_L^\mu u_L^\nu}{c^2} \right) c \int p^\mu p^\nu f \sqrt{g} \frac{d^3 p}{p_0}, \quad (4.12)$$

e a integração da equação acima à seguinte equação constitutiva para a pressão dinâmica:

$$\varpi = -c\tau \left\{ \frac{\dot{n}}{n} + \frac{\dot{T}}{T} \frac{\xi^3}{3} \left[\frac{3K_3}{\xi^2 K_2} - \frac{1}{\xi} + \frac{K_1}{K_2} - \frac{\dot{K}_1}{K_2} \right] \frac{\dot{a}}{a} \right\}. \quad (4.13)$$

Os detalhes do cálculo podem ser vistos em [54].

A eliminação de \dot{n} e \dot{T} pode ser feita através das equações de balanço do quadrifluxo de partículas e o tensor energia-momentum para um gás euleriano, dados respectivamente por

$$N^\mu = n u_L^\mu, \quad T^{\mu\nu} = (ne + p) \frac{u_L^\mu u_L^\nu}{c^2} - p g^{\mu\nu}, \quad (4.14)$$

onde e denota a energia por unidade de partícula. Empregando as leis de conservação $N_{;\nu}^\mu = 0$ e $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ obtemos a partir da equação de balanço que

$$\frac{\dot{n}}{n} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \quad (4.15)$$

para as componentes espaciais e

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{3k_B}{c_v} \frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.16)$$

com c_v denotando o calor específico do gás a volume constante (por partícula), o qual é dado por [54]

$$c_v = \frac{k_B}{K_2^2} (\xi^2 K_2^2 + 5K_3 K_2 \xi - K_3^2 \xi^2 - K_2^2). \quad (4.17)$$

A substituição das equações (4.15) e (4.16) na (4.13) e a consideração de que

$$\eta = \frac{\tau p}{3} \xi \left[\frac{3(K_3^2 \xi - 5K_3 K_2 - K_2^2 \xi)}{\xi^2 K_2^2 + 5K_3 K_2 \xi - K_3^2 \xi^2 - K_2^2} + \frac{\xi^2}{3} \left(\frac{3K_3}{\xi^2 K_2} - \frac{1}{\xi} + \frac{K_1}{K_2} - \frac{\dot{K}_1}{K_2} \right) \right], \quad (4.18)$$

pelo método de Chapman-Enskog para um gás relativístico, obtemos finalmente que

$$\varpi = -3\eta c \frac{\dot{a}}{a}. \quad (4.19)$$

Este resultado constitui aquilo que chamamos de *teoria de Eckart*, pois Carl Eckart, em 1940, foi o primeiro a procurar uma formulação relativística para uma teoria termodinâmica para processos fora do equilíbrio [58, 59, 60]. Em algumas situações ela é chamada também de *teoria termodinâmica de primeira ordem*, pois a entropia depende somente em primeira ordem das variáveis dissipativas.

A teoria termodinâmica de primeira ordem possui vários problemas. Em primeiro lugar, ela prediz uma velocidade infinita de propagação dos sinais térmico e viscoso, pois as equações que descrevem a temperatura e velocidade

são parabólicas. Enquanto isto não constitui um grande perigo no contexto da termodinâmica clássica, tal resultado é certamente inadmissível numa formulação relativística, tendo em vista que ele é inconsistente com o princípio de causalidade. Além disso, as equações de transporte de primeira ordem levam a indesejáveis instabilidades, como as perturbações de pequenas amplitudes em relação ao estado de equilíbrio, que divergem exponencialmente com o tempo para escalas curtas de tempo. A necessidade de se obter uma teoria livre desses problemas motivou o estudo de formulações relativísticas da termodinâmica estendida [61], as quais serão o objeto de nosso estudo na próxima seção.

4.2 Termodinâmica estendida

Como mencionado na seção anterior, a termodinâmica de primeira ordem, relativística, obtida por Eckart em 1940, e reformulada por Landau e Lifshitz na década de cinquenta, segue basicamente o conceito da termodinâmica para fluidos newtonianos, não-relativística, e logo contém os mesmos problemas dessa teoria; em particular, as perturbações dissipativas se propagam com velocidades infinitas.

O problema está centrado na forma com a qual os estados fora do equilíbrio são descritos - através de variáveis de equilíbrio local. A denominação “termodinâmica estendida” para a teoria termodinâmica causal de fluidos advém do fato dela “estender” a descrição através do emprego de variáveis dissipativas para caracterizar um estado fora do equilíbrio. O nome *termodinâmica de segunda ordem* advém ainda do fato dela possuir uma entropia que depende de termos de segunda ordem nas variáveis dissipativas. A versão estendida não-relativística da teoria fora formulada originalmente por Müller na década de 60 [61], enquanto a formulação relativística fora desenvolvida por Israel e Stewart nos anos 70 [57].

A partir da equação de Boltzmann é possível mostrar [61] que a teoria de Eckart deve ser modificada de tal forma que a pressão dinâmica obedecerá à equação diferencial

$$\tau \dot{\varpi} + \varpi = -3\eta H, \quad (4.20)$$

onde τ é o tempo de relaxação. Esta expressão goza de muitas vantagens. A mais preponderante de todas é o fato dela levar a velocidades de propagação *finitas* para as perturbações dissipativas em um meio, sendo assim consistente com a causalidade. De fato, a solução para o paradoxo da teoria de Eckart fora proposta por Cattaneo [62] e está relacionada à condução do calor. Ele argumentou que sob mudanças rápidas da temperatura, o fluxo de calor é influenciada pela história do gradiente de temperatura, permitindo assim a obtenção de uma equação hiperbólica para a temperatura. Müller [63, 64] incorporou essa idéia à termodinâmica dos processos irreversíveis, obtida originalmente por Eckart, permitindo a obtenção de um conjunto hiperbólico de equações para a temperatura e velocidade. Mais tarde, Müller [65] exibiu que a versão relativística da teoria era consistente com a causalidade e levava a velocidades finitas de propagação dos sinais térmicos e viscosos.

Como veremos no capítulo 6, a equação (4.20) será de grande importância quando discutirmos a respeito de modelos cosmológicos para um Universo dissipativo no qual desejamos evitar o problema da violação da causalidade. Todavia, veremos que isto terá o seu preço: as soluções obtidas para as equações de campo são extremamente complexas, impedindo a vinculação do modelo frente aos dados observacionais. A solução será então admitir uma

aproximação da equação diferencial (4.20) para a pressão dinâmica tal que o resultado obtido será da forma daquele da teoria de Eckart (4.19), porém com uma correção.

Capítulo 5

Tópicos de Estatística em Cosmologia

A questão a respeito da Cosmologia ser uma ciência ou não certamente carece de sentido atualmente. De fato, temos agora à disposição um grande número de conjuntos de dados, os quais possuem as mais variadas formas: dados de redshift provenientes de supernovas do tipo Ia, oscilações acústicas de bárions, observações de feixes de raios-gama, etc. Diz-se então que a Cosmologia entrara na era da precisão; todavia, “precisão” requer um considerável conhecimento de barras de erros, intervalos de confiança, etc, conceitos este inquestionavelmente de caráter estatístico.

Em verdade, é extremamente difícil hoje fugir de certas questões sobre o Universo sem entrar nos domínios da Estatística. Algumas questões fundamentais estão a ela intimamente ligadas: (i) são as condições iniciais do Universo de natureza gaussiana ? (ii) Qual o melhor valor para o índice barotrópico ω da equação de estado para a energia escura, adequado aos dados observacionais atuais ? (iii) Um modelo contendo um parâmetro ω diferente de -1 possui maior concordância do que um modelo com uma curvatura não-nula ? (iv) Qual seria o valor de ω para um modelo contendo tal característica ? A fim de se responder a tais questões, é preciso um conhecimento sobre os métodos e técnicas usualmente empregados em inferência estatísticas.

O objetivo deste capítulo é então fornecer as ferramentas básicas da Estatística. Concentrar-nos-emos particularmente na inferência bayesiana, cuja principal característica está em interpretar probabilidades como *graus de crença numa hipótese*. Em seguida, falaremos do teste χ^2 , o qual fornece basicamente uma medida da “confiança” atribuída a um dado modelo frente aos dados experimentais.

5.1 Inferência Bayesiana

Existem basicamente duas frentes de raciocínio estatístico: as inferências freqüentista e bayesiana. Na inferência freqüentista, as probabilidades são freqüências de ocorrência:

$$\mathcal{P} = \frac{n}{N}, \quad (5.1)$$

onde n denota o número de sucessos e N é o número total de tentativas. Deste modo, os freqüentistas definem probabilidade como sendo o limite quando o número de tentativas independentes tende ao infinito. Por outro lado, o método bayesiano interpreta as probabilidades como o *grau de confiabilidade de uma hipótese*.

Denotemos por x uma variável aleatória (ou evento). A probabilidade de x assumir um determinado valor é $\mathcal{P}(x)$, sendo que \mathcal{P} é chamado de uma *distribuição de densidade de probabilidades*. É importante enfatizar que seus valores podem ser discretos ou contínuos. Os frequentistas consideram somente distribuições de probabilidade dos eventos enquanto os bayesianos consideram hipóteses como eventos.

Em ambos os casos, as regras usuais de probabilidade se aplicam:

- $\mathcal{P}(x) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{P}(x) = 1$. Para o caso discreto, faz-se $\int \rightarrow \sum$;
- Para eventos mutuamente exclusivos, $\mathcal{P}(x \cup y) = \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}(y)$;
- Em geral $\mathcal{P}(x_1, x_2) = \mathcal{P}(x_1) \mathcal{P}(x_2|x_1)$. Em outras palavras, a probabilidade de x_1 e x_2 ocorrerem é igual ao produto entre a probabilidade da ocorrência de x_1 e a *probabilidade condicional* de x_2 , dado que x_1 já tenha ocorrido.

O último item merece uma discussão mais detalhada. De fato, somente para eventos independentes, nos quais $\mathcal{P}(x_2|x_1) = \mathcal{P}(x_2)$, podemos dizer que $\mathcal{P}(x_1, x_2) = \mathcal{P}(x_1) \mathcal{P}(x_2)$. Por outro lado, $\mathcal{P}(x_1, x_2) = \mathcal{P}(x_1) \mathcal{P}(x_2|x_1)$ pode ser escrito com a permutação de x_1 por x_2 como $\mathcal{P}(x_2, x_1) = \mathcal{P}(x_2) \mathcal{P}(x_2|x_1)$. Identificando-se $x_1 \rightarrow D$, onde D representa os *dados*, e $x_2 \rightarrow H$, com H denotando as *hipóteses*, obtemos o chamado *teorema de Bayes*:

$$\mathcal{P}(H|D) = \frac{\mathcal{P}(H) \mathcal{P}(D|H)}{\mathcal{P}(D)}. \quad (5.2)$$

Uma demonstração mais rigorosa deste teorema pode ser obtida em [66]. Na equação acima, $\mathcal{P}(H|D)$ é chamado de *posterior*, $\mathcal{P}(D|H)$ é a probabilidade dos dados com a hipótese dada (chamada de *likelihood* em Inglês) e $\mathcal{P}(H)$ é o *anterior*.

O teorema de Bayes é extremamente importante para a inferência estatística, e o utilizaremos mais adiante para discutir os conceitos que mais interessam para a Cosmologia: o teste χ^2 e as regiões de confiança para um modelo.

5.2 Teste χ^2

Na seção anterior descrevemos o teorema de Bayes, o qual está na base da inferência estatística. Segundo o ponto de vista bayesiano, D representa o conjunto de dados. Um modelo, por outro lado, é representado pelas hipóteses H , as quais são caracterizadas por um conjunto de parâmetros θ . O objetivo da inferência bayesiana é então determinar a distribuição de probabilidade para um modelo correspondente a um certo conjunto de dados, isto é, a densidade de probabilidade $\mathcal{P}(\theta|D)$. A partir dessa informação será possível inferir os valores corretos para os parâmetros bem como determinar os seus limites de confiança. Todavia, o que é possível se calcular com precisão é a probabilidade dos dados com respeito à hipótese, isto é, $\mathcal{P}(D|\theta)$, que está relacionado ao *posterior* pelo *anterior*. A arbitrariedade do *anterior*, no entanto, será um ponto crucial que exploraremos adiante.

5.2.1 Marginalização

Até agora discutimos somente sobre distribuições de probabilidade que dependiam simplesmente de uma única variável aleatória. Porém, o formalismo introduzido pode ser generalizado para situações nas quais existam duas ou mais variáveis aleatórias envolvidas.

Consideremos, por simplicidade, o caso de um espaço de probabilidades bidimensional, isto é, caracterizado por duas variáveis aleatórias, $\{x, y\}$. Podemos definir então uma *distribuição conjunta* $\mathcal{P}(x, y)$ que caracteriza a probabilidade em termos tanto de x como de y . No caso bidimensional, esta distribuição é conhecida como *bivariante*. Para um caso geral, ela é denominada *multivariante*.

Suponhamos agora que desejamos conhecer a probabilidade de x ocorrer independentemente da ocorrência do evento y . Sendo y uma variável aleatória, podemos simplesmente obter $\mathcal{P}(x)$ integrando a probabilidade conjunta sobre todos os valores possíveis de y :

$$\mathcal{P}(x) = \int dy \mathcal{P}(x, y). \quad (5.3)$$

Este processo é conhecido como *marginalização* e a probabilidade resultante $\mathcal{P}(x)$ é conhecida como *probabilidade marginal*.

5.2.2 χ^2 e qualidade do modelo

Consideremos um modelo \mathcal{M} descrito pelo conjunto de parâmetros θ e por um conjunto de dados D . Desejamos agora avaliar a qualidade desse modelo, ou seja, determinar se ele concorda com os dados. Para tanto, é necessário estabelecer uma função de mérito, capaz de quantificar a concordância dele frente aos dados. Os valores dos parâmetros que oferecem a melhor adequação serão então determinados através da maximização dessa função.

Seja então $\mathcal{P}(D, \theta)$ a densidade de probabilidade de se medir os dados D através dos parâmetros θ do modelo \mathcal{M} . Podemos assumir que as medidas estão distribuídas normalmente ao redor dos seus valores reais, isto é,

$$\mathcal{P}(D, \theta) \propto \exp \left[-\chi^2(\theta)/2 \right], \quad (5.4)$$

onde $\chi^2(\theta)$ é a distribuição qui-quadrado [68].

O posterior $\mathcal{P}(\theta, D)$ pode ser determinado através do teorema de Bayes (5.2):

$$\mathcal{P}(\theta, D) = \frac{\mathcal{P}(D, \theta)\mathcal{P}(\theta)}{\int d\theta \mathcal{P}(D, \theta)\mathcal{P}(\theta)}. \quad (5.5)$$

Devemos atentar para a dependência de $\mathcal{P}(\theta, D)$ com o *anterior* $\mathcal{P}(\theta)$. De fato, este último pode ser pensado intuitivamente como sendo todo o conhecimento prévio a respeito dos parâmetros antes dos dados observacionais serem coletados. Embora possua um aspecto um tanto subjetivo, o uso do *anterior* é recorrente na formulação bayesiana, a qual é comumente empregada em construções teóricas que dispõem somente de uma única realização dos dados observacionais.

A estimativa de parâmetros na formulação bayesiana se baseia na maximização do *posterior* $\mathcal{P}(\theta, D)$, enquanto na abordagem “puramente” frequentista isto é feito através da maximização de $\mathcal{P}(D, \theta)$. Quando se é empregado um

anterior não-informativo (ou vago) na formulação bayesiana, então ambas as abordagens levam às mesmas conclusões, sendo que a diferença entre elas se torna puramente conceitual [69].

Suponhamos que os dados medidos são independentes entre si e distribuídos gaussianamente ao redor de seus *valores reais*, $D(\theta)$, com uma matriz de covariância C (a matriz simétrica cujos elementos nas posições i, j determinam a covariância ou correlação entre os i -ésimo e j -ésimo elementos de um vetor formado por variáveis aleatórias) dependente dos erros experimentais [68]. A maximização de $\mathcal{P}(D, \theta)$ é equivalente àquela da função qui-quadrado

$$\chi^2(\theta) \equiv (D^{obs} - D(\theta))C^{-1}(D^{obs} - D(\theta))^T. \quad (5.6)$$

Para dados que não estejam correlacionados entre si é possível mostrar que [68] $C_{ij} = \delta_{ij}\sigma_i^2$ e

$$\chi^2(\theta) \equiv \sum_{i=1}^n \left(\frac{D^{obs} - D(\theta)}{\sigma_i} \right)^2, \quad (5.7)$$

onde σ_i denota os erros experimentais enquanto n representa o número de dados independentes disponíveis. Deste modo, os melhores parâmetros são aqueles para os quais a função χ^2 é minimizada.

A qualidade do modelo \mathcal{M} pode ser agora determinada através do valor mínimo χ_{min}^2 da função qui-quadrado. Para tanto, define-se o número de *graus de liberdade* como $\nu = n - m$, onde m e n denotam, respectivamente, o número de parâmetros do modelo e o número de dados independentes. A probabilidade do χ^2 observado exceder um valor $\hat{\chi}$ para o modelo correto é $Q(\nu, \hat{\chi}) = 1 - \Gamma(\nu/2, \hat{\chi}/2)$, onde Γ denota a função gama incompleta [68]. Deste modo, a função Q calculada em χ_{min}^2 fornece a qualidade do modelo frente aos dados experimentais. Se Q fornece uma probabilidade pequena, há três possíveis razões:

- O modelo está errado e deve ser rejeitado;
- Os erros estão abaixo do estimados;
- Os erros de medida não estão gaussianamente distribuídos.

Por outro lado, se Q é muito grande, temos os seguintes motivos:

- Os erros estão acima do estimado;
- Os dados estão correlacionados ou não são independentes;
- A distribuição é não-gaussiana (este caso é muito raro em Cosmologia).

Uma maneira simples e rápida de se verificar a qualidade de um modelo é dada através da regra “qui pelo olho”: o mínimo χ_{min}^2 deve ser aproximadamente igual ao número de graus de liberdade ν . Tal observação se torna cada vez mais correta para ν grande.

5.2.3 Limites de confiança

Após serem determinados os valores dos parâmetros que melhor se adequam aos dados observacionais, surge a questão referente a como representar as regiões de confiança ao redor dos mesmos. A escolha mais natural é obter

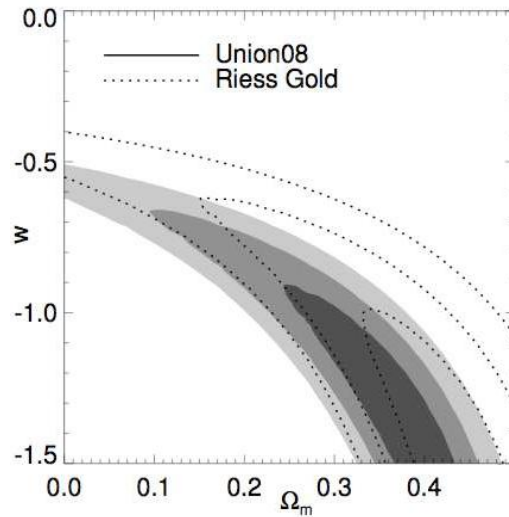


Figura 5.1: Exemplo de um χ^2 bidimensional para o conjunto de dados Union [67]. É possível observar que mesmo se os dados possuírem erros gaussianos, os erros associados aos parâmetros podem não ser muito bem descritos por distribuições gaussianas (e logo as regiões de confiança não são elipses).

uma região no espaço m -dimensional dos parâmetros contendo uma porcentagem da distribuição de probabilidades. Na prática, deseja-se então uma região compacta ao redor dos valores ótimos. Uma forma usual de se obter essas regiões é descrevê-las como superfícies de nível de χ^2 .

É necessário observar que podem haver casos nos quais χ^2 possui mais de um mínimo, de modo que as regiões de confiança acabam sendo desconexas. Para distribuições gaussianas multivariantes, no entanto, tais regiões são elipsoidais. Assim, se os valores dos parâmetros são perturbados em relação aos valores ótimos, a função χ^2 crescerá. É possível então utilizar as propriedades da função χ^2 (ver [68]) para se definir intervalos de confiança em relação as variações $\Delta\chi^2$. Na tabela 5.1 é exibido os valores de $\Delta\chi^2$ para as probabilidades convencionais de 68, 30%, 95, 40% e 99, 73%. No caso de distribuições gaussianas, as regiões de confiança correspondem aos convencionais 1σ , 2σ e 3σ , como mostra a figura 5.1.

Probabilidade	1	2	3
68, 30%	1, 00	2, 30	3, 53
95, 40%	2, 71	4, 61	6, 25
99, 73%	9, 00	11, 8	14, 2

Tabela 5.1 - Valores de $\Delta\chi^2$ para as regiões convencionais 1σ , 2σ e 3σ .

Além dos valores convencionados acima, a determinação das regiões de confiança para um caso geral pode ser feita através do seguinte procedimento:

1. Considere que m é o número de dados, n é o número de parâmetros e p o limite de confiança desejado.
2. Resolva a seguinte equação para $\Delta\chi^2$:

$$Q(n - m, \chi_{min}^2 + \Delta\chi^2) = p.$$

3. Determine a região para a qual $\chi^2 \leq \chi_{min}^2 + \Delta\chi^2$. Isto define a região de confiança.

Se a distribuição dos erros não é gaussiana, sendo porém possível ainda a utilização da formulação dada pela função χ^2 , ela deve ser então calibrada através de realizações simuladas múltiplas dos dados, procedimento este usualmente alcançado através do método de Monte Carlo [68].

Capítulo 6

Modelos cosmológicos com interações no setor escuro

Conforme motivado no capítulo 3, as medições feitas sobre os feixes de raios-gama [53] bem como considerações provenientes da física de altas energias [51, 52] sugerem a evolução contígua da matéria e energia escuras, ou seja, que elas estão acopladas. Neste sentido, investigaremos aqui modelos cosmológicos contendo dois fluidos arbitrários que interagem no chamado setor escuro. Procuraremos soluções estáveis em basicamente três situações: (i) modelos não-viscosos, (ii) modelos viscosos interagentes para os quais a pressão dinâmica é governada pela teoria de Eckart e (iii) modelos cosmológicos viscosos descritos segundo a termodinâmica estendida. Verificaremos em particular que para um Universo dissipativo descrito segundo à terceira proposta, obtemos grandes dificuldades técnicas no sentido que as inferências estatísticas não podem ser empregadas. Por outro lado, os modelos concernentes à teoria de Eckart, embora sofrendo de problemas de causalidade, descrevem muito bem os aspectos observacionais para um cenário viável do Universo.

Adotaremos neste capítulo unidades para as quais $8\pi G = c = 1$. Esta convenção é comum em Cosmologia e visa simplificar os cálculos a serem realizados.

6.1 Modelo escuro interagente - caso não-viscoso

Consideremos um modelo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) (3.7) espacialmente plano do Universo contendo bárions, matéria e energia escuras. Neste caso, a equação de Friedmann (3.36) e as leis de conservação (2.28) são escritas como

$$3H^2 = \rho_{dm} + \rho_{de} + \rho_m, \quad (6.1)$$

$$\dot{\rho}_{dm} + \dot{\rho}_{de} + 3H(\rho_{dm} + p_{dm} + \rho_{de} + p_{de}) = 0, \quad (6.2)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0, \quad (6.3)$$

onde os subíndices de , dm e m denotam, respectivamente, energia escura, matéria escura e matéria ordinária (bárions).

Supondo que os bárions se comportam como um fluido sem pressão ($p_m = 0$) a integração da equação (6.3) é direta e fornece

$$\rho_m = \rho_m^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3, \quad (6.4)$$

onde o índice 0 denota o valor atual da grandeza em questão.

A equação (6.2) expressa a interação entre matéria e energia escuras, permitindo assim a troca de energia e momentum. Conseqüentemente, não é possível se definir uma lei de conservação para cada fluido separadamente. Porém, seguindo a proposta de [70], essa equação pode ser desacoplada em duas equações “efetivas” de conservação da forma

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H\gamma_{dm}^e \rho_{dm} = 0, \quad (6.5)$$

$$\dot{\rho}_{de} + 3H\gamma_{de}^e \rho_{de} = 0, \quad (6.6)$$

onde introduzimos os *índices barotrópicos efetivos*

$$\gamma_{dm}^e = \gamma_{dm} + \frac{\gamma_{de}}{r} + \frac{\dot{\rho}_{de}}{3H\rho_m}, \quad (6.7)$$

$$\gamma_{de}^e = \gamma_{de} + \gamma_{dm}r + \frac{\dot{\rho}_{dm}}{3H\rho_{de}}. \quad (6.8)$$

Nas equações acima supomos que as pressões associadas aos fluidos escuros são da forma

$$p_i = (\gamma_i - 1)\rho_i, \quad (i = dm, de), \quad (6.9)$$

e introduzimos a razão entre as densidades

$$r = \frac{\rho_{dm}}{\rho_{de}}. \quad (6.10)$$

A manipulação das equações (6.5), (6.6), (6.7) e (6.8) leva à relação

$$(\gamma_{dm}^e - \gamma_{dm})r + (\gamma_{de}^e - \gamma_{de}) = 0, \quad (6.11)$$

e uma equação dinâmica para a razão entre densidades da forma

$$\dot{r} = -3Hr\Delta\gamma^e, \quad \Delta\gamma^e \equiv \gamma_{dm}^e - \gamma_{de}^e. \quad (6.12)$$

Podemos resolver a (6.12) a fim de obter a dinâmica do Universo. Para tanto, é preciso determinar a forma de $\Delta\gamma^e$.

Uma maneira de se obter a solução das equações acima é assumir que o índice barotrópico efetivo da energia escura é dado por

$$\gamma_{de}^e = \gamma_{de} - F(r), \quad (6.13)$$

onde $F(r)$ é uma função que depende somente da razão r entre as densidades. Como veremos adiante, a forma de F será estabelecida a partir de considerações de estabilidade da teoria. Tal *ansatz* é adotado simplesmente por simplicidade matemática, isto é, a fim de que a equação (6.12) seja integrável.

Substituindo a relação (6.13) na (6.12) e utilizando as equações (6.7) e (6.8) obtemos

$$\Delta\gamma^e = \Delta\gamma + F(r) \left(1 + \frac{1}{r} \right), \quad \Delta\gamma = \gamma_{dm} - \gamma_{de}. \quad (6.14)$$

Deste modo, as equações (6.5) e (6.6) podem ser reescritas como

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H\rho_{dm}\gamma_{dm} = -3H\rho_{de}F(r), \quad (6.15)$$

$$\dot{\rho}_{de} + 3H\rho_{de}\gamma_{de} = 3H\rho_{de}F(r). \quad (6.16)$$

É importante observar que o termo $3H\rho_{de}F(r)$ no lado direito de ambas as equações representa a transferência de energia entre a matéria e a energia escuras.

É evidente que a solução da equação dinâmica para r está condicionada à forma da função $F(r)$. Como podemos determinar esta sem supor de maneira *ad hoc* sua forma? A forma mais segura de proceder consiste em se realizar um estudo detalhado da estabilidade da equação (6.12). Para isto, assumiremos que as soluções $r = r_s$ representam um estágio estacionário do Universo. Deste modo, pela equação (6.12) segue que $\Delta\gamma^e(r_s) = 0$ e as soluções constantes r_s serão assintoticamente estáveis se

$$\left(\frac{d\Delta\gamma^e}{dr} \right)_{r=r_s} > 0. \quad (6.17)$$

Expressando esta condição através da equação (6.14) obtemos a condição de estabilidade

$$r_s(1 + r_s) \left(\frac{dF}{dr} \right)_{r=r_s} - F(r_s) > 0, \quad (6.18)$$

onde assumimos que os índices barotrópicos γ_i dos dois fluidos são constantes. Desta maneira, as formas propostas para F estão condicionadas à verificação da condição (6.18). Investigaremos então dois casos: um no qual $F(r)$ é constante e o outro em que essa função é variável.

6.1.1 Caso $F(r) = \text{constante} < 0$

Escolhendo os índices barotrópicos γ_i como constantes, a opção

$$F(r) = -\frac{r_\infty}{1 + r_\infty} \Delta\gamma, \quad (6.19)$$

onde r_∞ é um valor constante para a razão entre as densidades no infinito, a condição (6.18) é satisfeita e a equação (6.12) pode ser integrada. Tal escolha advém apenas de uma conveniência matemática, não tendo assim uma interpretação física. Além disso, como γ_{dm} e F são constantes segue da relação (6.13) que γ_{de}^e também é uma constante. Logo, a equação efetiva da energia escura (6.5) pode ser integrada também e obtemos assim

$$\rho_{dm} = \rho_{de}^0 \left\{ r_\infty + (r_0 - r_\infty) \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\alpha} \right\} \left(\frac{a_0}{a} \right)^\beta, \quad (6.20)$$

$$\rho_{de} = \rho_{de}^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^\beta, \quad (6.21)$$

onde definimos

$$\alpha = \frac{\Delta\gamma}{1 + r_\infty}, \quad \beta = 3 \frac{r_\infty \gamma_{dm} + \gamma_{de}}{1 + r_\infty}. \quad (6.22)$$

É conveniente aqui expressarmos os nossos resultados em termos do redshift z pelo emprego da relação (3.30). Introduzindo também os parâmetros de densidade no tempo atual $z_0 = 0$,

$$\Omega_{dm}^0 = r_0 \Omega_{de}^0, \quad \Omega_{de}^0 = \frac{\rho_{de}^0}{3H_0^2}, \quad \Omega_m^0 = \frac{\rho_m^0}{3H_0^2}, \quad (6.23)$$

com $\Omega_{dm}^0 + \Omega_{de}^0 + \Omega_m^0 = 1$, podemos reescrever a equação de Friedmann, através de (6.20) e (6.21), como

$$H^2 = H_0^2 \left\{ \Omega_{de}^0 (1 + r_\infty)(1 + z)^\beta + \Omega_m^0 (1 + z)^3 + [1 - \Omega_m^0 - (1 + r_\infty)\Omega_{de}^0 (1 + z)^{3\gamma_{dm}}] \right\}. \quad (6.24)$$

6.1.2 Caso $F(r)$ variável

Outra escolha possível para a função $F(r)$, consonante com a condição (6.18), é

$$F(r) = -\frac{(1-r)r_\infty^2}{r(1-r_\infty^2)} \Delta\gamma, \quad (6.25)$$

onde r_∞ continua a ter a mesma interpretação da seção anterior. Além disso, essa escolha é novamente motivada por uma conveniência matemática.

A integração das equações (6.5) e (6.6) leva-nos a

$$\rho_{dm} = \rho_{de}^0 \sqrt{r_\infty^2 + (r_0^2 - r_\infty^2)} \left(\frac{a_0}{a} \right)^\nu \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\varepsilon} \left[\frac{(1-r/r_\infty)(1+r_0/r_\infty)}{(1-r_0/r_\infty)(1+r/r_\infty)} \right]^{\frac{r_\infty}{2}}, \quad (6.26)$$

$$\rho_{de} = \rho_{de}^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\varepsilon} \left[\frac{(1-r/r_\infty)(1+r_0/r_\infty)}{(1-r_0/r_\infty)(1+r/r_\infty)} \right]^{\frac{r_\infty}{2}}, \quad (6.27)$$

onde

$$\nu = \frac{6\Delta\gamma}{1-r_\infty^2}, \quad \varepsilon = \gamma_{de} - \frac{\Delta\gamma r_\infty^2}{1-r_\infty^2}. \quad (6.28)$$

Substituindo as soluções acima na equação de Friedmann obtemos que o parâmetro de Hubble H pode ser expresso como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{de}^0 (1 + z)^{3\varepsilon} \left[\frac{(1-r/r_\infty)(1+r_0/r_\infty)}{(1-r_0/r_\infty)(1+r/r_\infty)} \right]^{\frac{r_\infty}{2}} \left\{ 1 + \sqrt{r_\infty^2 + (r_0^2 - r_\infty^2)} (1 + z)^\nu \right\} + \Omega_m^0 (1 + z)^3. \quad (6.29)$$

É interessante observar que no limite $r_\infty \rightarrow 0$ obtemos uma mistura de fluidos não-interagentes com índices barotrópicos constantes em ambas as soluções obtidas.

z	$H(z)$	σ
0.09	69	12
0.17	83	8.3
0.27	70	14
0.4	87	17.4
0.88	117	23.4
1.3	168	13.4
1.43	177	14.2
1.53	140	14
1.75	202	40.4

Tabela 6.1 - Dados observacionais para o parâmetro de Hubble.

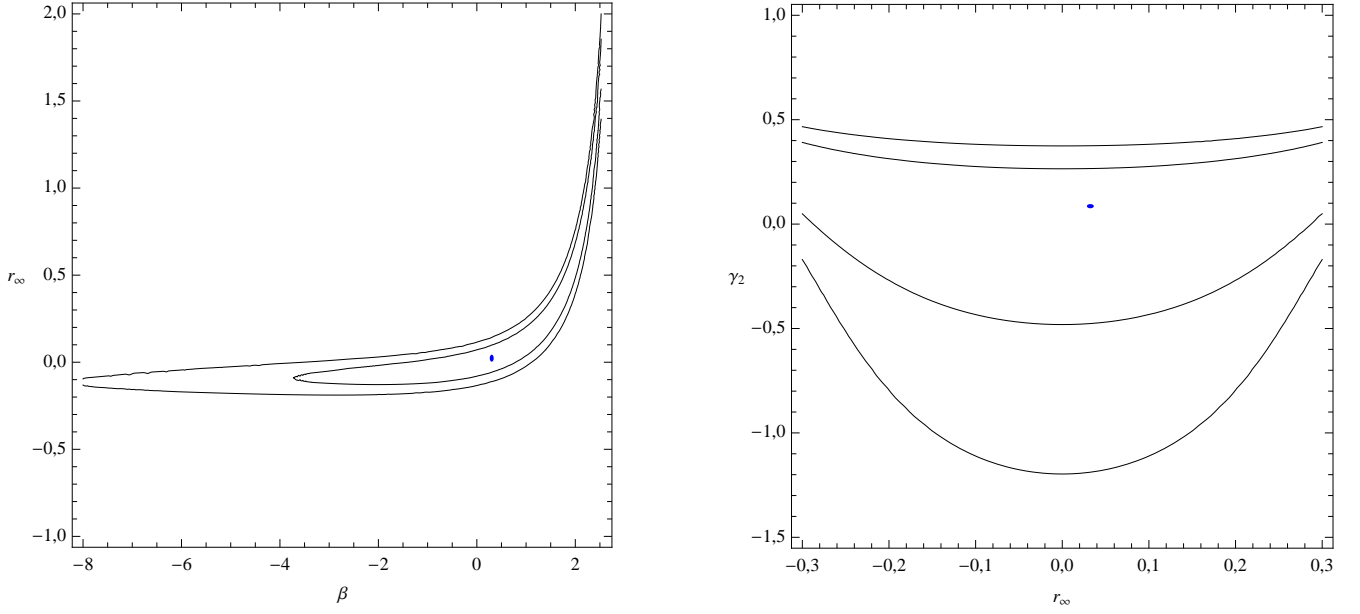


Figura 6.1: Limites de confiança e regiões 1σ e 2σ para o modelos, correspondendo respectivamente às probabilidade convencionais de 68, 30% e 95, 40%. Direita: Caso $F = \text{constante}$. Esquerda: Caso F variável.

6.1.3 Vínculos cosmológicos

Empregaremos agora os métodos da inferência bayesiana para determinar os parâmetros livres dos modelos considerados na seção anterior. No caso de $F(r) = \text{constante}$, os parâmetros livres são γ_{dm} , r_∞ e β . Tem-se como objetivo então determinar os valores desses parâmetros frente aos dados observacionais.

Denotemos por a_i , com $i = 1, 2$, os parâmetros livres dos modelos. Seguindo a nomenclatura do capítulo 5, consideraremos um conjunto de dados não-informativo. Conseqüentemente, a obtenção dos melhores valores para a_i estará condicionada à minimização da função χ^2 , como no caso freqüentista. O conjunto de dados que adotaremos está baseado no parâmetro de Hubble $H(z)$ experimental [73] e estão exibidos no tabela 6.1.

A função χ^2 pode então ser expressa como

$$\chi^2(a_1, a_2) = \sum_{i=1}^9 \left(\frac{H(a_1, a_2; z_i) - H_{obs}(z_i)}{\sigma_i} \right)^2, \quad (6.30)$$

tendo em vista que temos nove pontos experimentais. Além disso, assumiremos que $H_o = 72 \text{ km}/(\text{s.Mpc})$, $\Omega_{dm}^0 = 0,25$ e $\Omega_{de}^0 = 0,70$ e $\Omega_m = 0,05$, em conformidade com [46]. Suporemos também um Universo espacialmente plano contendo uma matéria escura sem pressão ($\gamma_{dm} = 1$ na equação (6.9)).

Para o caso $F(r) = \text{constante}$ temos $a_1 = r_\infty$ e $a_2 = \beta$ e o mínimo de χ^2 é igual a $\chi_{min}^2 = 9,02445$ para $r_\infty = 0,0230767$ e $\beta = 0,30245$. Da (6.22) temos ainda que $\alpha = 0,899181$ e $\gamma_2 = 0,0328392$. Para $F(r)$ variável teremos $a_1 = r_\infty$ e $a_2 = \gamma_2$ e o mínimo é igual a $\chi_{min}^2 = 9,03738$ para $r_\infty = 0,0851298$ e $\gamma_2 = 0,0328392$.

Na figura 6.1 são exibidas as regiões de confiança 1σ e 2σ para ambas as formas de $F = F(r)$, correspondendo aos valores dos parâmetros com 68, 30% e 95, 40% de probabilidade, respectivamente. Os pontos representam os valores ótimos para cada modelo.

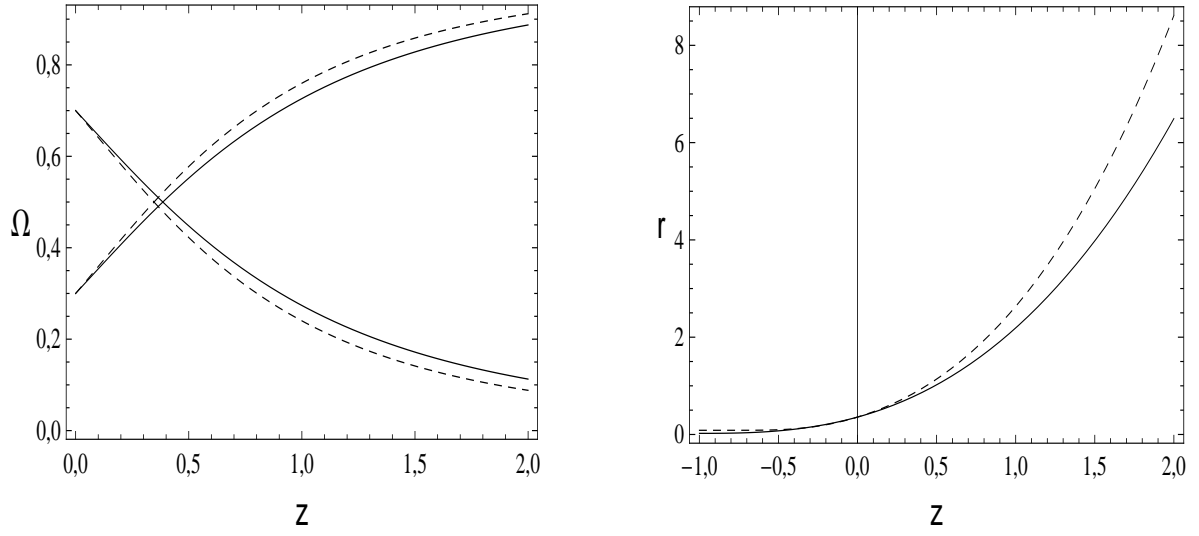


Figura 6.2: Esquerda - Parâmetros de densidade em função do redshift. Direita: Razão entre densidades. Linhas cheias - caso F constante; linhas tracejadas - caso F variável. A transferência de energia entre os campos é mais acentuada no caso F variável. Além disso, o gráfico da razão entre densidades mostra que ρ_{dm} e ρ_{de} coincidem no presente, sendo que a energia escura dominará no futuro.

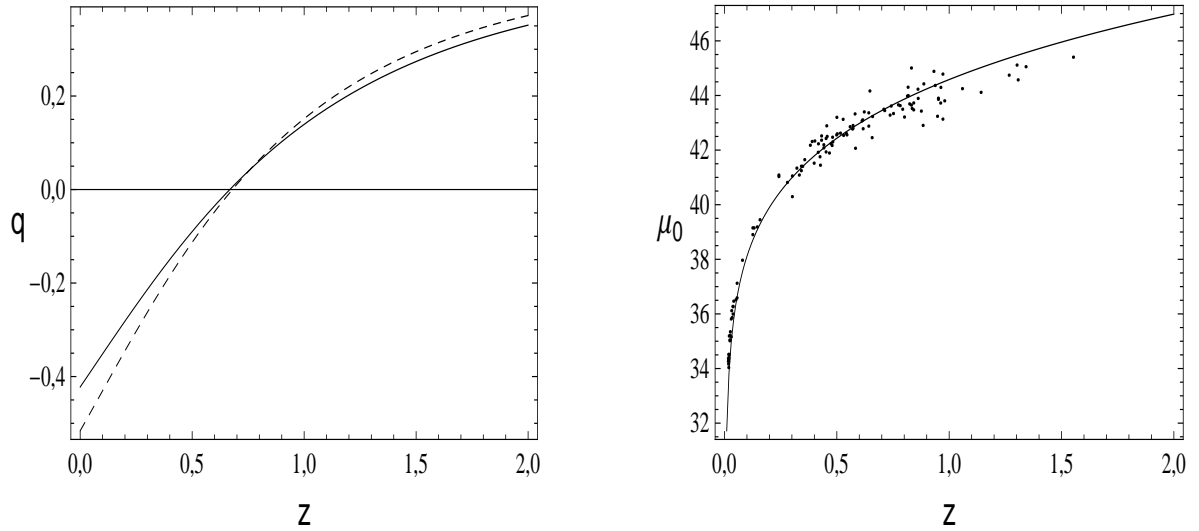


Figura 6.3: Esquerda - Parâmetros de desaceleração em função do redshift. Direita: Módulo de distância teórico μ_0 comparado frente aos dados observacionais. Linhas cheias - caso F constante; linhas tracejadas - caso F variável. Observa-se que a desaceleração é mais proeminente no caso F variável. Por outro lado, o módulo de distância teórico concorda com a observação. Pontos obtidos a partir do conjunto de dados Union [76].

Podemos agora procurar interpretar fisicamente as soluções obtidas. Analisaremos primeiramente o comportamento dos parâmetros de densidade e a razão entre as densidades de energia em ambas as prescrições. Na figura 6.2 as linhas cheiras representam o caso F constante enquanto as linhas pontilhadas correspondem ao caso F variável. É possível notar que a transferência de energia proveniente do campo energia escura para a matéria escura é muito mais acentuada no caso variável, idéia esta corroborada pelo gráfico da razão r em função do redshift. É evidente também que a energia escura dominará no futuro.

Na figura 6.3 são exibidos os gráficos para o parâmetro de desaceleração $q = 1/2 + 3p/2\rho$ e o módulo de distância teórico μ_0 . Os valores no tempo atual do parâmetro de desaceleração $q(0)$ o redshift z_t no qual ocorre a transição do regime desacelerado para o regime acelerado são: (i) $q(0) \approx -0,47$ e $z_t \approx 0.72$ para um F constante e (ii) $q(0) \approx -0,52$, $z_t \approx 0.68$ quando F é variável. Tais valores possuem a mesma magnitude daqueles obtidos observacionalmente [74, 75]. Por outro lado, o gráfico referente ao módulo de distância teórico mostra que as curvas obtidas para ambas as formas de F coincidem. Além disso, é possível verificar que elas estão de acordo com a observação [76].

6.2 Modelos viscosos com interações no setor escuro

A partir desta seção investigaremos uma classe de modelos cosmológicos para um Universo espacialmente plano cujos constituintes são um campo de matéria, que engloba os bárions e a matéria escura, e um campo de energia escura. Tais estão interagindo entre si e os processos irreversíveis são levados em conta através da inclusão de uma pressão fora do equilíbrio.

Duas descrições para a pressão dinâmica, ditas, as teorias termodinâmicas de primeira e segunda ordem, serão empregadas. Além disso, como na seção anterior, suporemos que o campo de matéria e a energia escura estão acoplados através de seus índices barotrópicos efetivos, os quais são considerados como funções da razão entre as suas densidades de energia. Finalmente, uma inferência bayesiana será empregada para se estabelecer os vínculos cosmológicos nos modelos.

6.2.1 Fluidos escuros dissipativos e interagentes

Consideremos novamente um modelo FLRW espacialmente plano (3.7) para o Universo contendo dois constituintes: um campo de matéria (m), que representa os bárions e a matéria escura, e uma energia escura (de). Suporemos que essas componentes interagem entre si e os processos irreversíveis decorrentes dessa interação são levados em conta através da inclusão de uma pressão fora do equilíbrio.

A equação de Friedmann (3.36) e as leis de conservação (2.28) são expressas como

$$3H^2 = \rho_m + \rho_{de}, \quad (6.31)$$

e

$$\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_{de} + 3H(\rho_m + p_m + \rho_{de} + p_{de} + \varpi) = 0, \quad (6.32)$$

respectivamente, onde ϖ denota a pressão dinâmica.

Seguindo novamente a abordagem de [70], podemos desacoplar (6.32) em duas equações de conservação “efetivas” da forma

$$\dot{\rho}_m + 3H\gamma_m^e \rho_m = 0, \quad (6.33)$$

$$\dot{\rho}_{de} + 3H\gamma_{de}^e \rho_{de} = 0, \quad (6.34)$$

onde introduzimos os *índices barotrópicos efetivos*

$$\gamma_m^e = \gamma_m + \frac{(\gamma_{de} - \gamma_{de}^e)}{r} + \frac{\varpi}{\rho_m}, \quad (6.35)$$

$$\gamma_{de}^e = \gamma_{de} + (\gamma_m - \gamma_m^e)r + \frac{\varpi}{\rho_{de}}. \quad (6.36)$$

Nas equações acima, r ainda denota a razão entre as densidades (6.10). Além disso, assumimos equações de estado barotrópicas da forma (6.9).

A partir deste ponto, devemos necessariamente fornecer a forma da pressão dinâmica para podermos dar continuidade aos cálculos. Como mencionamos no início desta seção, empregaremos duas descrições. A primeira, baseada na teoria de Eckart, fornece uma pressão fora do equilíbrio proporcional ao parâmetro de Hubble H , sendo que o fator de proporcionalidade é identificado com a viscosidade. Por outro lado, na termodinâmica estendida, a pressão dinâmica é governada por uma equação diferencial, dita (4.20). Cada uma das descrições oferece vantagens e desvantagens. Em particular, veremos que os modelos cosmológicos obtidos junto à termodinâmica estendida exibem várias dificuldades no que tange a comparação frente aos dados observacionais. Os modelos baseados na teoria de Eckart, por outro lado, se adequam muito bem aos dados, mais sofrem de problemas relativos às características intrínsecas da teoria termodinâmica como, por exemplo, questões referente a causalidade.

6.2.2 Modelo cosmológico na formulação de Eckart

Como demonstrado na seção 4.1, na teoria termodinâmica de primeira ordem a pressão dinâmica assume a forma

$$\varpi = -3\eta H, \quad (6.37)$$

lembrando que o parâmetro de Hubble é definido como $H = \frac{\dot{a}}{a}$. O fator de proporcionalidade η entre ϖ e H é denominado de *coeficiente de viscosidade volumétrica*. Uma hipótese usual em Cosmologia é deste ser proporcional à raiz quadrada da densidade de energia total $\rho = \rho_m + \rho_{de}$:

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\rho}, \quad (6.38)$$

onde η_0 é uma constante.

Empregando-se então as equações (6.37) e (6.38) nas expressões (6.35) e (6.36) para os índices barotrópicos efetivos obtemos

$$\gamma_m^e = \gamma_m + \frac{(\gamma_{de} - \gamma_{de}^e)}{r} - \sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \eta_0, \quad (6.39)$$

$$\gamma_{de}^e = \gamma_{de} + (\gamma_m - \gamma_m^e)r - \sqrt{3} (1 + r) \eta_0. \quad (6.40)$$

Seguiremos novamente a proposta de [70] e consideraremos que o índice bartrópico efetivo para a energia escura é expresso como em (6.13), onde $F(r)$ continua a ser uma função que depende somente da razão entre as densidades de energia. Substituindo então as novas expressões para γ_m^e e γ_{de}^e nas equações (6.33) e (6.34) obtemos

$$\dot{\rho}_m + 3H\gamma_m\rho_m = -3H\rho_{de}F - 3H\varpi, \quad (6.41)$$

e

$$\dot{\rho}_{de} + 3H\gamma_{de}\rho_{de} = 3H\rho_{de}F. \quad (6.42)$$

Como no caso não-viscoso, o termo $3H\rho_{de}F$ pode ser interpretado fisicamente como a transferência de energia entre os campos de matéria e de energia escura. E o termo $3H\varpi$ que aparece no lado direito da equação (6.41) é entendido como sendo a transferência de energia do campo de matéria para o campo gravitacional. De acordo com as referências [71, 72] a componente temporal do tensor energia-momentum do campo gravitacional é dada por $T_G^{00} = -3H^2$. Identificando-se T_G^{00} com a densidade de energia para o campo gravitacional, ρ_G , obtemos $\rho_G = -(\rho_m + \rho_{de})$ e a evolução temporal para ρ_G será

$$\dot{\rho}_G + 3H(\rho_G + p_G) = 3H\varpi, \quad (6.43)$$

onde a pressão do campo gravitacional é expressa como $p_G = -(p_m + p_{de})$. Conseqüentemente, o termo $3H\varpi$ representa a transferência de energia do campo de matéria para o campo gravitacional.

A evolução temporal da razão r entre as densidades de energia é obtida a partir das equações (6.41) e (6.42), sendo ela dada por

$$\dot{r} = -3Hr\mathcal{F}(r), \quad (6.44)$$

onde \mathcal{F} denota a expressão

$$\mathcal{F}(r) = \left[\gamma_m - \gamma_{de} + \left(1 + \frac{1}{r} \right) (F(r) - \sqrt{3}\eta_0) \right]. \quad (6.45)$$

Assumindo a condição de estabilidade

$$\left(\frac{d\mathcal{F}(r)}{dr} \right)_{r=r_s} \geq 0, \quad (6.46)$$

é possível obter a desigualdade

$$r_s(1 + r_s) \left(\frac{dF}{dr} \right)_{r=r_s} - (F(r_s) - \sqrt{3}\eta_0) \geq 0, \quad (6.47)$$

onde supomos que os índices barotrópicos γ_m e γ_{de} são constantes. Por inspeção da (6.47) vemos que a escolha $F(r) = \sqrt{3}\eta_0$ satisfaz a condição de estabilidade. Novamente, tal escolha é tomada por simplicidade; existem inúmeras funções que satisfazem a condição de estabilidade.

Estamos aptos agora a obter as soluções cosmológicas para o nosso modelo. Substituindo $F(r) = \sqrt{3}\eta_0$ na relação (6.13) obtemos $\gamma_{de}^e = \gamma_{de} - \sqrt{3}\eta_0$. Como tanto F e γ_{de} são constantes, segue dessa relação que γ_{de}^e também é uma constante. Isto nos permite então integrar a (6.34) para obter

$$\rho_{de} = \rho_{de}^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\gamma_{de}^e}, \quad (6.48)$$

lembrando que o índice 0 indica o valor no tempo atual da grandeza em consideração.

A diferenciação da equação de Friedmann (6.31) com respeito ao tempo cósmico leva a

$$\dot{H} + \frac{3}{2}(\gamma_m - \sqrt{3}\eta_0)H^2 - \frac{1}{2}(\gamma_m - \gamma_{de})\rho_{de}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma_{de}^e} = 0, \quad (6.49)$$

onde empregamos a (6.48). A integração desta equação nos leva a

$$H^2 = \frac{\rho_m + \rho_{de}}{3} = \mathcal{C} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(\gamma_m - \sqrt{3}\eta_0)} + \frac{\rho_{de}^0}{3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma_{de}^e}, \quad (6.50)$$

onde \mathcal{C} é uma constante de integração. Esta pode ser determinada a partir da condição inicial $H(a_0) = H_0$ de modo que

$$\mathcal{C} = H_0^2 - \frac{\rho_{de}^0}{3}. \quad (6.51)$$

Conseqüentemente a equação (6.50) é escrita finalmente como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m^0(1+z)^{3(\gamma_m - \sqrt{3}\eta_0)} + \Omega_{de}^0(1+z)^{3\gamma_{de}^e}, \quad (6.52)$$

onde expressamos a solução final em termos do redshift (3.30) e dos parâmetros de densidade no tempo atual.

O conhecimento do parâmetro de Hubble para o modelo nos permite determinar imediatamente a evolução dos constituintes do Universo através dos parâmetros de densidade. Da definição (3.38) temos que

$$\Omega_m(z) = \frac{\Omega_m^0(1+z)^{3(1-\sqrt{3}\eta_0)}}{\Omega_m^0(1+z)^{3(1-\sqrt{3}\eta_0)} + \Omega_{de}^0(1+z)^{3\gamma_{de}^e}}, \quad \Omega_{de}(z) = \frac{\Omega_{de}^0(1+z)^{3\gamma_{de}^e}}{\Omega_m^0(1+z)^{3(1-\sqrt{3}\eta_0)} + \Omega_{de}^0(1+z)^{3\gamma_{de}^e}}, \quad (6.53)$$

enquanto a razão entre densidades é expressa como $r(z) = \Omega_m(z)/\Omega_{de}(z)$. Além disso, a pressão dinâmica ϖ da (6.37) pode ser facilmente expressa em termos do parâmetro de Hubble (6.52). Segue então que

$$\frac{\varpi}{H_0^2} = -3\sqrt{3}\eta_0 \left[\Omega_m^0(1+z)^{3(\gamma_m - \sqrt{3}\eta_0)} + \Omega_{de}^0(1+z)^{3\gamma_{de}^e} \right]. \quad (6.54)$$

É comum em Cosmologia a introdução de um parâmetro de estado efetivo ω_e , tal que

$$\omega_e = \frac{(p_m + p_{de} + \varpi)}{(\rho_m + \rho_{de})}, \quad (6.55)$$

a fim de se expressar o parâmetro de desaceleração (3.40) como

$$q = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\omega_e. \quad (6.56)$$

Das equações barotrópicas de estado e da pressão dinâmica ϖ escrevemos

$$\omega_e = \frac{(\gamma_m - 1)\Omega_m^0(1+z)^{3(\gamma_m - \sqrt{3}\eta_0)}}{\Omega_m^0(1+z)^{3(\gamma_m - \sqrt{3}\eta_0)} + \Omega_{de}^0(1+z)^{3\gamma_{de}^e}} + \frac{(\gamma_{de}^e + \sqrt{3}\eta_0 - 1)\Omega_{de}^0(1+z)^{3\gamma_{de}^e}}{\Omega_m^0(1+z)^{3(\gamma_m - \sqrt{3}\eta_0)} + \Omega_{de}^0(1+z)^{3\gamma_{de}^e}} - \sqrt{3}\eta_0. \quad (6.57)$$

Observemos então que nosso modelo possui três parâmetros livres: γ_m , η_0 e γ_{de}^e . O objetivo agora é estabelecer um vínculo comológico, isto é, determinar os valores desse parâmetros frente aos dados observacionais. Para tanto, empregaremos os métodos da inferência bayesiana vistos no capítulo 5 e calcularemos o valor mínimo da função χ^2 (5.7), que em nosso contexto assume a forma

$$\chi^2(\gamma_m, \eta_0, \gamma_{de}^e) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{H(\gamma_m, \eta_0, \gamma_{de}^e; z_i) - H_{obs}(z_i)}{\sigma_i} \right)^2, \quad (6.58)$$

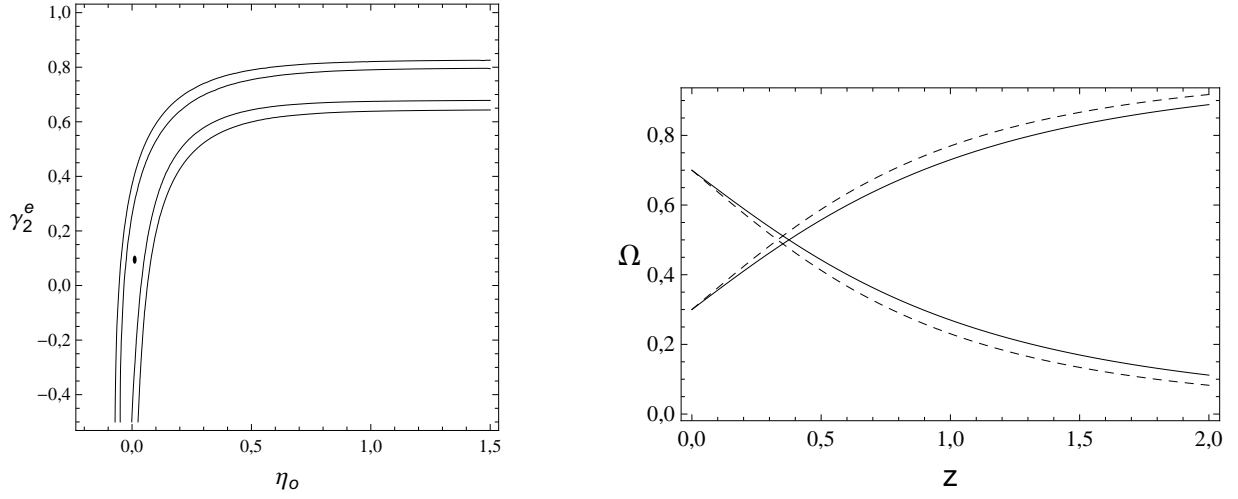


Figura 6.4: Esquerda: Limites de confiança e regiões 1σ e 2σ para o modelo, correspondendo respectivamente às probabilidades convencionais de 68, 30% e 95, 40%. Direita: Parâmetros de densidade como funções do redshift. Linhas cheias - caso viscoso; linhas tracejadas - caso não-viscoso. A transferência de energia é mais acentuada no limite não-viscoso.

onde n denota o número total de dados empregados.

Como o campo de matéria se refere a uma combinação de bárions e matéria escura, podemos tratar ambos como um fluido sem pressão. Assim escolhemos $\gamma_m = 1$. Resta-nos especificar os coeficientes η_0 e γ_{de}^e , os quais podem ser obtidos pelo processo acima descrito. Para tanto, empregaremos o conjunto de dados para o parâmetro de Hubble baseado em [73]. Estes dados dependem da idade diferencial do Universo como funções do redshift z na forma

$$H(z) = -(1+z)^{-1} \frac{dz}{dt}, \quad (6.59)$$

e podem ser medidos diretamente através do conhecimento de dz/dt . Os dados experimentais são exibidos na tabela 6.1.

Empregando um algoritmo de evolução diferencial [68] é possível minimizar a função χ^2 dada pela equação (6.58) para obter os valores ótimos de η_0 e γ_{de}^e . Empregando os dados da tabela 6.2 obtemos $\eta_0 \approx 0,01105$ e $\gamma_{de}^e \approx 0,09474$ para um $\chi_{min}^2 \approx 9,0772615$. Adotamos aqui os valores $H_0 = 72 \text{ km}/(\text{s.Mpc})$, $\Omega_m^0 = 0,30$ e $\Omega_{de}^0 = 0,70$, em conformidade com [46]. As regiões 1σ e 2σ , representando respectivamente 68, 30% e 95, 45% dos conjuntos de dados aleatórios, é exibida na figura 6.4. Além disso, no limite sem viscosidade ($\eta_0 = 0$), a minimização de χ^2 resulta em $\gamma_{de}^e \approx 0,012636$ para $\chi_{min}^2 \approx 9,10371$.

Na figura 6.4 são exibidos também os parâmetros de densidade em função do redshift. As linhas cheias representam o caso viscoso enquanto as linhas pontilhadas correspondem ao caso não-viscoso. É possível observar que a transferência de energia da energia escura para o campo de matéria é muito mais pronunciada no caso não-viscoso. Isto pode ser observado também através de uma inspeção cuidadosa da figura 6.5, exibindo a razão entre as densidades. Observa-se que para valores negativos do redshift, isto é, no futuro do Universo, não há diferença entre os casos, sugerindo também um domínio da energia escura.

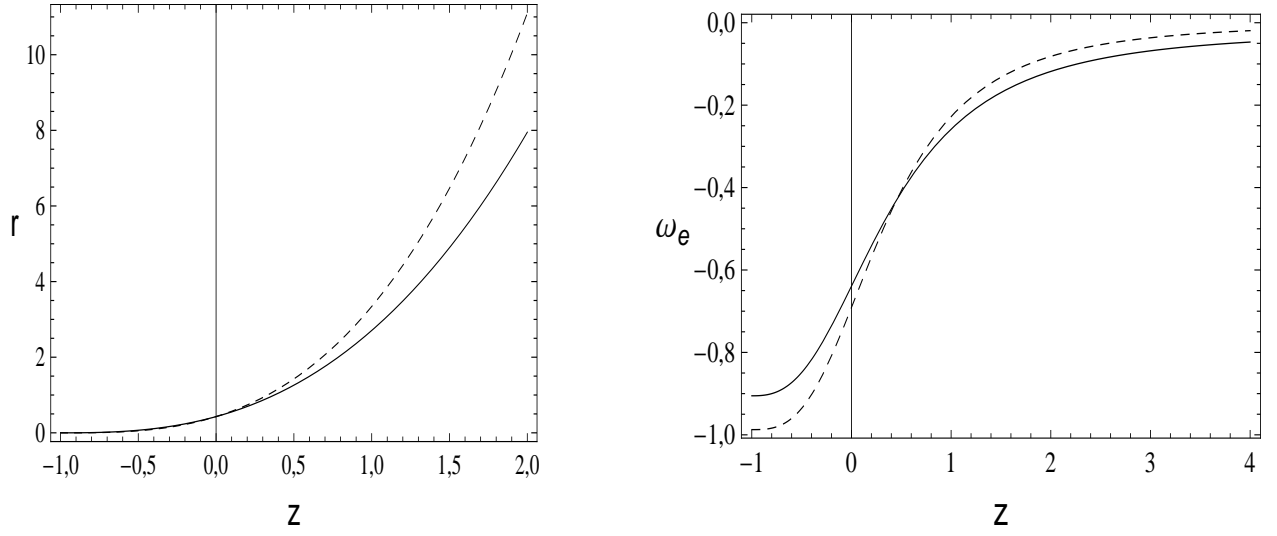


Figura 6.5: Esquerda: Razão entre densidades em função do redshift. Direita: Parâmetro efetivo para o modelo de Eckart. Linhas cheias - caso viscoso; linhas tracejadas - caso não-viscoso. O gráfico da razão entre densidades mostra que ρ_{dm} e ρ_{de} coincidem no presente, com o conseqüente domínio da energia escura no futuro. Além disso, a energia escura se aproxima muito da constante cosmológica.

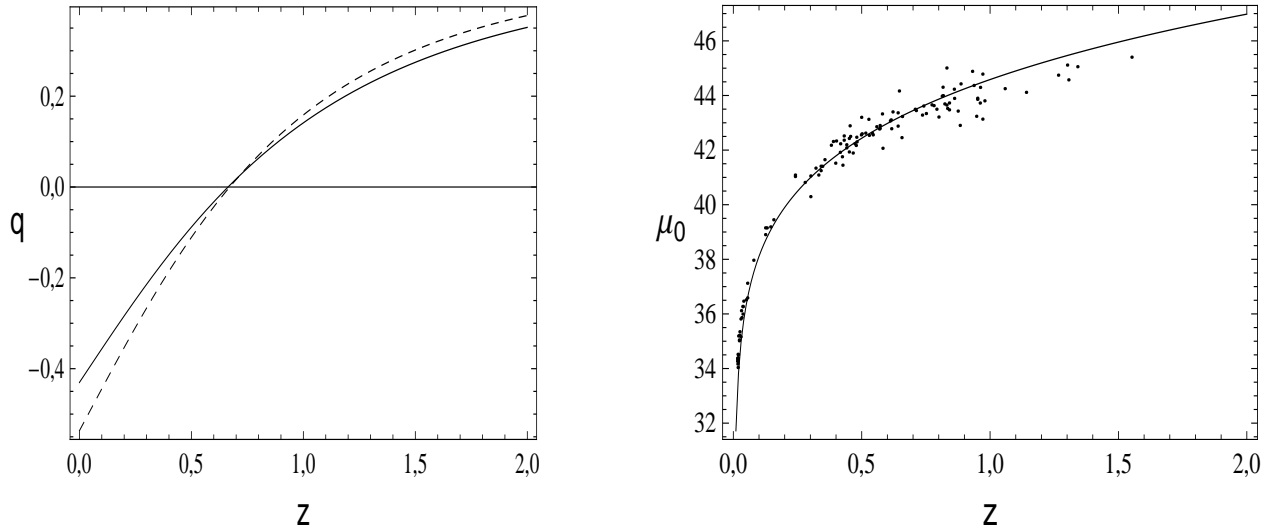


Figura 6.6: Esquerda: Parâmetro de desaceleração em função do redshift. Direita: Módulo de distância teórico para o modelo de Eckart. Linhas cheias - caso viscoso; linhas tracejadas - caso não-viscoso. A desaceleração no passado é maior no limite sem viscosidade. Por outro lado, o módulo de distância teórico concorda com os dados observacionais. Pontos obtidos a partir do conjunto de dados Union [76].

Na figura 6.5 o parâmetro efetivo ω_e em função do redshift é exibido para os casos viscoso e não-viscoso. Podemos concluir que no passado a mistura de matéria e energia escura se comporta quase como poeira (fluido sem pressão), apresentando, porém, um caráter quintessencial no futuro. Além disso, no futuro o caso não-viscoso se aproxima muito da constante cosmológica $\omega_e \approx -1$.

Nas figuras 6.6 são exibidos o parâmetro de desaceleração e módulo de distância teórico para o modelo. Os valores presentes do parâmetro de desaceleração $q(0)$ e do redshift z_t para o qual ocorre a transição do regime desacelerado para o acelerado ocorrem, respectivamente, para (i) $q(0) \approx -0,46$ e $z_t \approx 0,72$ no caso viscoso e (ii) $q(0) \approx -0,54$, $z_t \approx 0,67$ para o caso não-viscoso. Tais valores estão em concordância com aqueles obtidos na literatura: $q(0) \approx -0,46 \pm 0,13$ (ver [74]) e $z_t = 0,74 \pm 0,18$ (conforme [75]). Observemos também que o caso viscoso possui uma desaceleração menor no passado do que o limite sem viscosidade.

Finalmente, não se observam diferenças significativas entre os casos no gráfico do módulo de distância teórico em 6.6. Os pontos escuros representam os dados experimentais, inferindo-se disso que o modelo possui uma boa concordância com os dados observacionais [76].

6.2.3 Modelo viscoso segundo a termodinâmica estendida

Até agora investigamos modelos cosmológicos dentro da estrutura teórica da termodinâmica de primeira ordem. Entretanto, conforme mencionado no capítulo 4, tal teoria exhibe diversas dificuldades, sendo a mais notável delas a velocidade infinita de propagação de sinais. Evidentemente essas complicações são naturalmente levadas aos modelos cosmológicos.

A proposta desta seção é fornecer modelos cosmológicos que sigam a formulação da teoria termodinâmica de *segunda ordem*, denominada também de termodinâmica estendida. A vantagem dessa estrutura teórica reside no fato de que ela é causalmente aceitável; isto é, as velocidades de propagação das perturbações dissipativas são finitas. Por outro lado, veremos que as soluções cosmológicas provenientes da termodinâmica estendida são muito mais complexas do que aquelas estudadas na teoria de primeira ordem. De fato, observaremos que até mesmo o estabelecimento de uma inferência bayesiana é prejudicada.

Consideremos novamente um modelo FLRW espacialmente plano para o Universo preenchido por dois constituintes, ditos um campo de matéria (bárions + matéria escura) e energia escura. Todo formalismo desenvolvido na seção 6.2.1 permanece válido; a diferença reside no fato de que não adotaremos mais a equação (6.37) para representar a pressão dinâmica ϖ . Assumiremos agora que ela é governada pela equação diferencial (4.20):

$$\tau \dot{\varpi} + \varpi = -3\eta H, \quad (6.60)$$

onde τ denota o tempo de relaxação e η a viscosidade volumétrica.

Podemos diferenciar a equação de Friedmann (6.31) em relação ao tempo cósmico e substituir no resultado a equação (6.32) para obter

$$\varpi = -2\dot{H} - 3\gamma_m H^2 + (\gamma_m - \gamma_{de})\rho_{de} \quad (6.61)$$

e

$$\ddot{\omega} = -2\ddot{H} - 6\gamma_m H \dot{H} - 3H(\gamma_m - \gamma_{de})\gamma_{de}^e \rho_{de}. \quad (6.62)$$

Estas duas equações podem então ser combinadas através da (6.60) para fornecer uma equação diferencial para o parâmetro de Hubble. Segue que

$$\ddot{H} + \alpha_1 H \dot{H} + \alpha_2 H^3 + \alpha_3 \rho_2 H = 0, \quad (6.63)$$

onde os coeficientes α_i são definidos como

$$\alpha_1 = \left(3\gamma_m + \frac{1}{\tau H}\right), \quad \alpha_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma_m}{\tau H} - \frac{\eta}{\tau H^2}\right), \quad \alpha_3 = \frac{\gamma_m - \gamma_{de}}{2} \left(3\gamma_{de}^e - \frac{1}{\tau H}\right). \quad (6.64)$$

É interessante observar que se supormos todos os coeficientes α_i como constantes na (6.63) obtemos que γ_{de}^e é constante, $\tau \propto 1/H$ e $\eta \propto H$.

Como no caso da teoria de Eckart, suporemos que a viscosidade volumétrica depende somente da densidade total de energia. Além disso, para que a equação (6.60) para a pressão dinâmica seja integrável é necessário considerar $\tau \propto \rho^{-1}$. Assim

$$\tau = \frac{\eta}{\rho}, \quad \eta = \eta_0 \sqrt{\rho}, \quad (6.65)$$

onde η_0 é uma constante. Deste modo, os coeficientes α_i podem ser reescritos na forma

$$\alpha_1 = \left(3\gamma_m + \frac{\sqrt{3}}{\eta_0}\right), \quad \alpha_2 = \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma_m \sqrt{3}}{\eta_0} - 3\right), \quad \alpha_3 = \frac{\gamma_m - \gamma_{de}}{2} \left(3\gamma_{de}^e - \frac{\sqrt{3}}{\eta_0}\right). \quad (6.66)$$

A integração da equação (6.34) nos leva novamente a

$$\rho_{de} = \rho_{de}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma_{de}^e}. \quad (6.67)$$

Isto nos permite integrar também a equação (6.63) para obter

$$H^2 = \mathcal{C}_1 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{\lambda_+} + \mathcal{C}_2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{\lambda_-} - \frac{2\alpha_3 \rho_{de}}{9(\gamma_{de}^e)^2 - 3\gamma_{de}^e \alpha_1 + 2\alpha_2} \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma_{de}^e}, \quad (6.68)$$

onde \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são duas constantes de integração e os coeficientes λ_{\pm} são definidos como

$$\lambda_{\pm} = \frac{\alpha_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{4} - 2\alpha_2}. \quad (6.69)$$

Empregando a equação de Friedmann juntamente com o resultado (6.67) obtemos

$$\rho_m = 3 \left[\mathcal{C}_1 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{\lambda_+} + \mathcal{C}_2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{\lambda_-} \right] - \left\{ \frac{6\alpha_3}{9(\gamma_{de}^e)^2 - 3\gamma_{de}^e \alpha_1 + 2\alpha_2} + 1 \right\} \rho_{de}^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma_{de}^e}. \quad (6.70)$$

A fim de que a solução cosmológica seja estável impomos que o termo entre colchetes na equação acima seja nulo.

Desta forma, obtemos a equação algébrica

$$6\alpha_1 + 9(\gamma_{de}^e)^2 - 3\gamma_{de}^e \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \quad (6.71)$$

cujas solução leva a

$$F = \frac{-3}{3\gamma_{de}^e - \sqrt{3}/\eta_0}. \quad (6.72)$$

Recordemos aqui que estamos supondo que o índice barotrópico efetivo é da forma $\gamma_{de}^e = \gamma_{de} - F(r)$.

Empregando as condições iniciais usuais obtemos a solução geral

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m^0 (1+z)^{\frac{\alpha_1}{2}} \cosh \left[\frac{\sqrt{\alpha_1^2 - 8\alpha_2}}{2} \ln(1+z) \right] + \Omega_{de}^0 (1+z)^{3\gamma_{de}^e}. \quad (6.73)$$

Além disso, a pressão viscosa pode ser calculada via (6.61) e o resultado é

$$\frac{\varpi}{H_0^2} = \Omega_m^0 C(z+1)^{\frac{\alpha_1}{2}} - \Omega_{de}^0 (3\gamma_{de}^e + \gamma_{de} + 2\gamma_m)(1+z)^{3\gamma_{de}^e}, \quad (6.74)$$

onde definimos duas funções, λ e C , da forma

$$\lambda = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 - 8\alpha_2}}{2} \ln(1+z), \quad C = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 - 8\alpha_2}}{2} \sinh \lambda - \left(3\gamma_m + \frac{\alpha_1}{2} \right) \cosh \lambda. \quad (6.75)$$

É notória a complexidade das equações para o parâmetro de Hubble e pressão dinâmica na formulação da termodinâmica estendida. De fato, os fatores $1/\eta_0$ não permitem o emprego de uma inferência bayesiana na região com $\eta_0 \rightarrow 0$ no espaço dos parâmetros, impedindo assim a validação do modelo frente aos dados observacionais. Para entender isso, basta observar que essa dependência com $1/\eta_0$ aparece também na função χ^2 (através do parâmetro de Hubble teórico). Neste caso, tomando o limite $\eta_0 \rightarrow 0$ vemos que a função χ^2 não é definida. Deste modo, os algoritmos de otimização não são capazes de obter possíveis pontos mínimos nessa região. Por outro lado, não é esperado fisicamente que o coeficiente de viscosidade η_0 possua um valor grande (da ordem da unidade, por exemplo). Imagina-se que ele esteja no intervalo $0 < \eta_0 < 1$. Como o modelo não permite a investigação estatística nessa região, não é possível saber se ele é consistente com os dados observacionais.

6.2.4 Uma alternativa para a pressão dinâmica

Como mencionado no final da seção anterior, a solução geral para o modelo cosmológico junto à termodinâmica estendida é muito elegante, porém difícil de ser trabalhada. De fato, não é possível empregar os métodos da inferência bayesiana, pois temos uma singularidade no espaço dos parâmetros quando $\eta_0 \rightarrow 0$. Procuraremos então nesta seção utilizar uma abordagem diferente, na qual obteremos uma expressão aproximada para a pressão dinâmica.

Consideremos novamente a equação diferencial para a pressão dinâmica,

$$\tau \dot{\varpi} + \varpi = -3\eta H, \quad (6.76)$$

a qual podemos reescrever como

$$\left(1 + \tau \frac{d}{dt} \right) \varpi = -3\eta H = -\sqrt{3}\eta_0 \rho. \quad (6.77)$$

Sendo então $1 + \tau d/dt$ um operador diferencial, podemos resolver a equação acima para ϖ a fim de se obter

$$\varpi = -\sqrt{3}\eta_0 \left(1 - \tau \frac{d}{dt} \right) \rho, \quad (6.78)$$

onde empregamos a aproximação $(1+x)^{-1} \approx 1-x$, válida quando $|x| \ll 1$. A derivada em relação ao tempo cósmico da densidade total de energia nesta equação pode ser facilmente calculada através da lei de conservação

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho + \varpi) = 0; \quad (6.79)$$

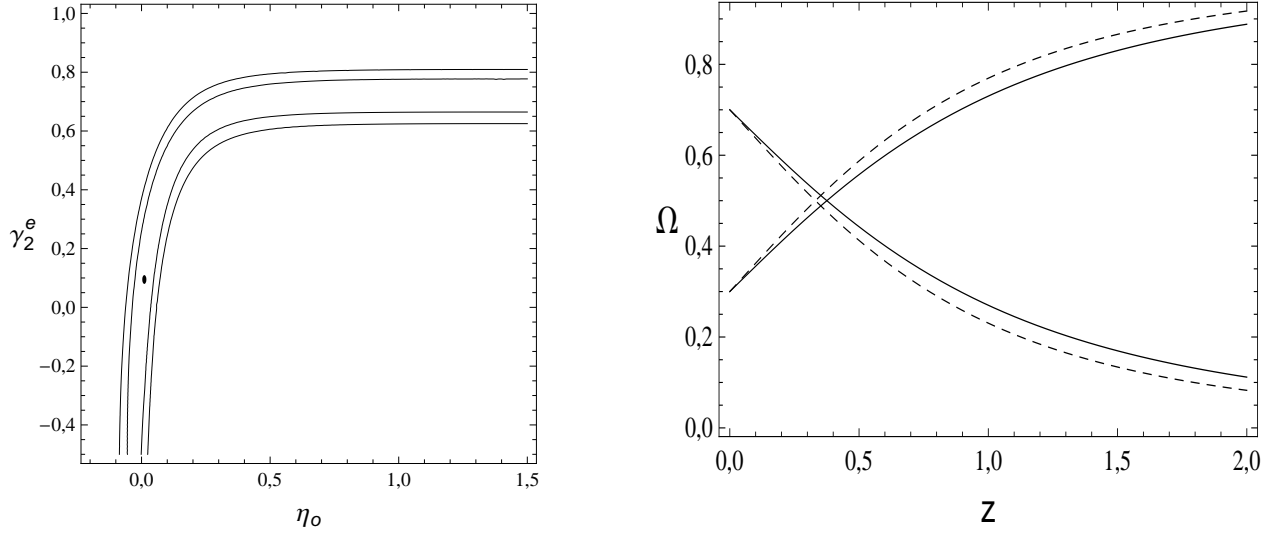


Figura 6.7: Esquerda: Limites de confiança e regiões 1σ e 2σ para o modelo, correspondendo respectivamente às probabilidades convencionais de 68,30% e 95,40%. Direita: Parâmetros de densidade como funções do redshift. Linhas cheias - caso viscoso; linhas tracejadas - caso não-viscoso. A transferência de energia é maior no limite não-viscoso.

deste modo teremos que

$$\varpi = -\frac{\sqrt{3}\eta_0\rho}{1+3\eta_0^2} \left[1 + \sqrt{3}\eta_0 \left(1 + \frac{p}{\rho} \right) \right], \quad (6.80)$$

onde p denota a pressão total dos constituintes do Universo (campo de matéria + energia escura).

Desejamos obter uma equação diferencial que descreva a evolução temporal do nosso modelo. Isto pode ser feito através das equações gerais (6.41) e (6.42) e pela definição de razão entre densidades r . Tendo em vista as equações de estado barotrópicas (6.9) para os constituintes, resulta da razão

$$\frac{p}{\rho} = (\gamma_m - 1) \frac{r}{1+r} + (\gamma_{de} - 1) \frac{1}{1+r} \quad (6.81)$$

que

$$\varpi = -\frac{\sqrt{3}\eta_0\rho}{1+3\eta_0^2} \left[1 + \sqrt{3}\eta_0 \left(1 + (\gamma_m - 1) \frac{r}{1+r} + (\gamma_{de} - 1) \frac{1}{1+r} \right) \right]. \quad (6.82)$$

Assim as equações (6.41) e (6.42) podem ser combinadas para formar a equação diferencial

$$\dot{r} = -3Hr\mathcal{F}(r), \quad (6.83)$$

onde $\mathcal{F}(r)$ é uma função definida por

$$\mathcal{F}(r) = (\gamma_m - \gamma_{de}) + \left(1 + \frac{1}{r} \right) F(r) - \frac{\sqrt{3}\eta_0\rho}{1+3\eta_0^2} \left[\left(1 + \frac{1}{r} \right) + \sqrt{3}\eta_0 \left(\gamma_m + \frac{1}{r} + \frac{(\gamma_{de} - 1)}{r} \right) \right]. \quad (6.84)$$

Recordemos que o índice barotrópico efetivo para a energia escura é suposto a ser da forma $\gamma_{de}^e = \gamma_{de} - F(r)$, onde $F(r)$ é uma função dependendo somente da razão r entre as densidades.

Como no caso da teoria de Eckart, a função $F(r)$ está sujeita a um vínculo determinado pela condição de estabilidade

$$\left(\frac{d\mathcal{F}(r)}{dr} \right)_{r=r_s} \geq 0, \quad (6.85)$$

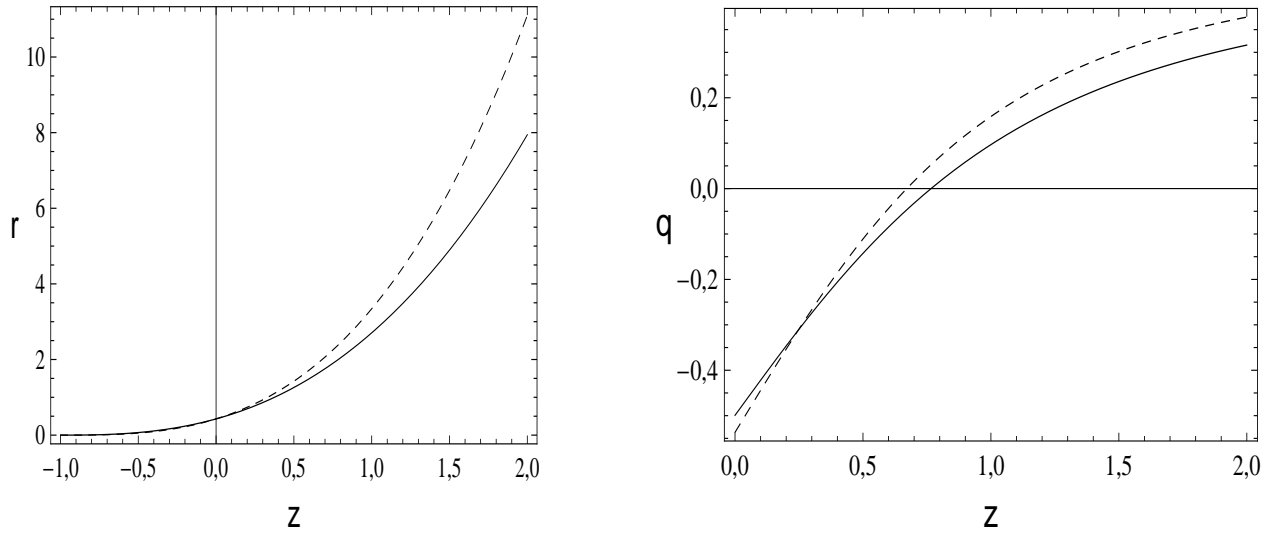


Figura 6.8: Esquerda: Razão entre densidades em função do redshift. Direita: Parâmetro efetivo para o modelo de Eckart. Linhas cheias - caso viscoso; linhas tracejadas - caso não-viscoso. O gráfico da razão entre densidades mostra que ρ_{dm} e ρ_{de} coincidem no presente, com o domínio da energia escura no futuro. Além disso, a energia escura se aproxima muito da constante cosmológica.

obtida diretamente da equação diferencial (6.83) para a razão r . Da forma (6.84) para $\mathcal{F}(r)$ resulta que

$$r_s(1 + r_s) \left(\frac{d\mathcal{F}(r)}{dr} \right)_{r=r_s} - \left\{ F(r_s) - \frac{\sqrt{3}\eta_0}{1 + 3\eta_0^2} (1 + \sqrt{3}\eta_0\gamma_{de}) \right\} \geq 0, \quad (6.86)$$

onde assumimos que os índices barotrópicos são constantes. É fácil verificar agora que a escolha

$$F(r) = \frac{\sqrt{3}\eta_0}{1 + 3\eta_0^2} (1 + \sqrt{3}\eta_0\gamma_{de}) \quad (6.87)$$

satisfaz o vínculo estabelecido. Como $\gamma_{de}^e = \gamma_{de} - F(r)$ e sendo agora γ_{de}^e uma constante, segue que

$$F(r) = \sqrt{3}\eta_0[1 + \sqrt{3}\eta_0\gamma_{de}^e]. \quad (6.88)$$

Observemos que o resultado acima se assemelha muito com aquele obtido na seção 6.2.2. Fisicamente isto representa o fato de que a solução (6.80) para a pressão dinâmica corresponde a uma correção de primeira ordem na formulação de Eckart. Neste caso, era de se esperar que a função $F(r)$ possuísse alguma correção também.

Retornemos à equação diferencial para a razão entre densidades r . Substituindo a nossa escolha (6.88) na equação de $\mathcal{F}(r)$ e simplificando obtemos

$$\mathcal{F}(r) = \frac{\gamma_m - \gamma_{de}^e - \sqrt{3}\eta_0 - 3\gamma_{de}^e\eta_0^2}{1 + 3\eta_0^2}, \quad (6.89)$$

que é essencialmente uma constante. Deste modo, a equação diferencial de r é facilmente integrada e obtém-se

$$r = r_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \left(\frac{\gamma_m - \gamma_{de}^e - \sqrt{3}\eta_0 - 3\gamma_{de}^e\eta_0^2}{1 + 3\eta_0^2} \right). \quad (6.90)$$

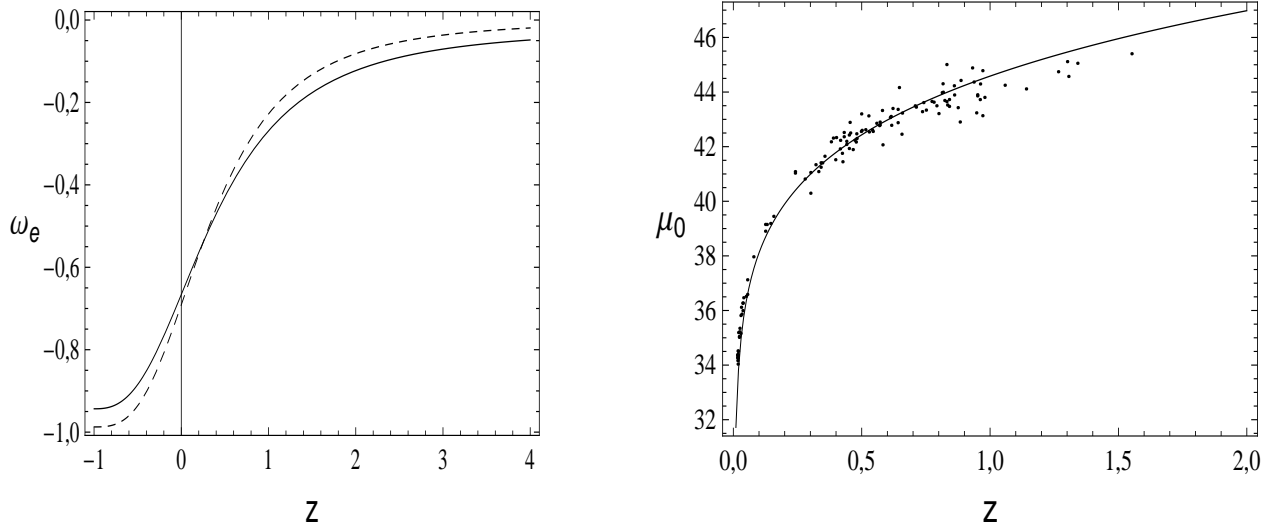


Figura 6.9: Esquerda: Parâmetro de desaceleração em função do redshift. Direita: Módulo de distância teórico para o modelo de Eckart. Linhas cheias - caso viscoso; linhas tracejadas - caso não-viscoso. A desaceleração no passado é maior no limite sem viscosidade. Por outro lado, o módulo de distância teórico concorda com os dados observacionais. Pontos obtidos junto ao conjunto de dados Union [76].

Integrando-se também a equação efetiva para a energia escura, a fim de se obter

$$\rho_{de} = \rho_{de}^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\gamma_{de}^e}, \quad (6.91)$$

podemos determinar a densidade de energia para o campo de matéria, a qual é escrita como

$$\rho_m = \rho_m^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \left(\frac{\gamma_m - \sqrt{3}\eta_0}{1 + 3\eta_0^2} \right). \quad (6.92)$$

Segue então da equação de Friedmann que o parâmetro de Hubble para o modelo é dado por

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m^0 (1+z)^3 \left(\frac{\gamma_m - \sqrt{3}\eta_0}{1 + 3\eta_0^2} \right) + \Omega_{de}^0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\gamma_{de}^e}, \quad (6.93)$$

resultado este muito parecido com aquele obtido para a teoria termodinâmica de primeira ordem.

Podemos agora determinar os parâmetros livres da teoria, ditos η_0 e γ_{de}^e , através do método da inferência bayesiana. Diferentemente do modelo geral da termodinâmica de segunda ordem, nossa aproximação aqui leva a uma solução bem comportada com relação ao parâmetro η_0 , de modo que a função χ^2 pode ser minimizada.

Como nos casos anteriores, utilizaremos novamente os dados observacionais da tabela 6.1. Adotaremos também $H_0 = 72 \text{ km}/(\text{s.Mpc})$, $\Omega_m^0 = 0.30$ e $\Omega_{de}^0 = 0.70$, valores estes encontrados em [46]. Considerando um algoritmo de otimização do tipo evolução diferencial obtemos $\eta_0 \approx 0,010851$ e $\gamma_{de}^e \approx 0,094738$ para $\chi_{min}^2 \approx 9,06164$. Para o caso não-viscoso os valores obtidos são $\gamma_{de}^e \approx 0,012636$ para $\chi_{min}^2 \approx 9,08808$. A figura 6.7 exhibe as regiões 1σ e 2σ referentes aos limites de confiança para o modelo.

Tendo em mãos os valores dos parâmetros livres, podemos iniciar a análise cosmológica do modelo. Investigaremos primeiramente o comportamento dos parâmetros de densidade $\Omega_i(z)$, $i = m, de$. Estes podem ser expressos

como

$$\Omega_m(z) = \frac{\Omega_m^0(1+z)^{3\left(\frac{\gamma_m - \sqrt{3}\eta_0}{1+3\eta_0^2}\right)}}{\Omega_m^0(1+z)^{3\left(\frac{\gamma_m - \sqrt{3}\eta_0}{1+3\eta_0^2}\right)} + \Omega_{de}^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma_{de}^e}} \quad (6.94)$$

e

$$\Omega_{de}(z) = \frac{\Omega_{de}^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma_{de}^e}}{\Omega_m^0(1+z)^{3\left(\frac{\gamma_m - \sqrt{3}\eta_0}{1+3\eta_0^2}\right)} + \Omega_{de}^0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\gamma_{de}^e}}. \quad (6.95)$$

Observemos então o gráfico direito da figura 6.7. Ela mostra os parâmetros de densidade em função do redshift. As linhas cheias correspondem ao caso viscoso enquanto as linhas pontilhadas caracterizam o limite sem viscosidade. É possível verificar que a transferência de energia entre a energia escura e o campo de matéria é mais proeminente no caso não-viscoso. Tal fato é também sugerido pelo gráfico da razão entre densidades, exibido na figura 6.8. Próximo à época atual os casos coincidem, fato este oriundo da predominância da energia escura sobre a matéria.

Ainda na figura 6.8 observamos o gráfico do parâmetro de desaceleração q em função do redshift. O seu valor no tempo atual bem como o redshift no qual ocorre a transição do regime desacelerado para acelerado são, respectivamente, $q(0) \approx -0,498$, $z_t \approx 0,772$ para o caso viscoso e $q(0) \approx -0,538$, $z_t \approx 0,671$ para o limite sem viscosidade. Embora ambos os resultados estejam em concordância com os valores observacionais [74, 75], é evidente que os resultados relativos ao modelo viscoso são ligeiramente melhores.

Na figura 6.9 são exibidos os gráficos para o índice efetivo $\omega_e = (p_m + p_{de})/\rho$ e módulo de distância teórico em função do redshift. No caso de ω_e , observa-se que os campos de matéria e energia escura se comportavam muito analogamente à poeira cósmica no passado, aproximando-se ambos de um campo de quintessência no futuro. De fato, o caso não-viscoso assemelhar-se-á muito à constante cosmológica no futuro. Por outro lado, o gráfico do módulo de distância teórico mostra que ambos os casos coincidem, exibindo também uma boa concordância com os dados observacionais [76].

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Modelos interagentes sem viscosidade

Diversos trabalhos na literatura abordam modelos cosmológicos nos quais a matéria e energia escuras interagem entre si. A forma do termo de interação nesses modelos, por outro lado, é em geral arbitrária.

A descrição aqui exibida, por outro lado, evita naturalmente a introdução de termos fenomenológicos de interação ao se supor que os componentes escuros interagem através de seus índices barotrópicos efetivos, os quais foram considerados como funções somente da razão r entre as densidades de energia. Pelo emprego de uma análise bayesiana fora mostrado que modelo está de acordo com os dados observacionais. Em particular, observa-se a estabilidade assintótica de r e o domínio da energia escura no futuro. Além disso, os valores para a transição do regime desacelerado para o acelerado são da mesma ordem de grandeza daqueles obtidos experimentalmente. Todos esses atributos indicam a consistência do modelo.

7.2 Modelos viscosos e interagentes na termodinâmica de primeira ordem

É sabido que em modelos cosmológicos FLRW os efeitos dissipativos são provenientes de uma viscosidade volumétrica nos fluidos cósmicos. A formulação usualmente investigada é aquela proposta por Eckart, posteriormente desenvolvida por Landau e Lifshitz. Seguindo essa tendência, propusemos modelos viscosos contendo interações no setor escuro nos quais a transferência de energia entre o campo de matéria e a energia escura é favorecida pela presença de uma pressão fora do equilíbrio. Como no modelo não-viscoso também apresentado neste trabalho, a interação entre os constituintes é dada através de seus índices barotrópicos efetivos. Os vínculos cosmológicos para o modelo são estabelecidos com métodos da inferência bayesiana. Comparações foram feitas com o limite sem viscosidade. Observa-se que a transferência de energia entre as componentes é mais eficiente no caso não-viscoso. Por outro lado, em ambos os casos a energia escura predomina no futuro, sendo que a mistura de constituintes se comporta como matéria sem pressão no passado. Os valores estimados para o parâmetro de desaceleração e do módulo de distância estão também em concordância com as evidências observacionais.

7.3 Modelos viscosos e interagentes na termodinâmica de segunda ordem

Como mencionado no capítulo 4 deste trabalho, a teoria termodinâmica de primeira ordem, conhecida usualmente como teoria de Eckart, possui uma série de inconsistências, sendo a mais grave a predição de velocidades infinitas para a propagação de perturbações dissipativas no meio em questão, violando assim o princípio de causalidade. A necessidade de uma estrutura teórica livre desses problemas impulsionou o estudo da teoria termodinâmica de segunda ordem, dita também termodinâmica estendida.

Vários de modelos descrevendo cosmologias FLRW segundo a termodinâmica estendida foram propostos [72, 77], porém poucos destes levaram em conta a interação entre a matéria e a energia escuras. Em nosso trabalho exibimos um modelo levando em conta tal fenômeno. Todavia, a solução cosmológica obtida é demasiado complexa para se estabelecer vínculos observacionais através dos métodos estatísticos usuais. Houve então a necessidade de se procurar uma versão simplificada, mas que pudesse ser comparada com os dados. Partindo de uma aproximação da equação diferencial que descreve a evolução da pressão dinâmica em termos do tempo cósmico, encontramos um modelo cosmológico viscoso para o qual podemos estabelecer os vínculos observacionais. Em particular, verificamos que a energia escura predomina sobre a matéria no futuro enquanto que ambas se comportam como poeira no passado. Além da concordância com os dados observacionais para o módulo de distância, o caso viscoso apresenta valores muito bons para $q(0)$ e o redshift de transição z_t .

7.4 Trabalhos Futuros

Muitos trabalhos na literatura atestam que a utilização de dados observacionais oriundos de supernovas do tipo Ia são muito mais eficientes para se estabelecer vínculos cosmológicos do que os dados observacionais para $H(z)$. Além disso, o emprego de medidas da oscilação acústica de bárions têm se tornado comuns em Cosmologia. Uma linha natural de pesquisa emerge então da possibilidade de se vincular os modelos aqui estudados utilizando todos esses conjuntos de dados. Além disso, um estudo mais detalhado sobre a natureza física das soluções provenientes da termodinâmica estendida se faz necessário. Por fim, a interação através dos índices barotrópicos efetivos abre também a possibilidade de se empregar tal técnica a outro tipos de equações de estado, como o gás de Chaplygin, a energia escura holográfica, entre outros.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Persic, P. Salucci, F. Stel, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 281, 27 (1996).
- [2] A. G. Riess et al., *Astron. J.* 116, 1009 (1998). 553–563, 2001.
- [3] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* 517, 565 (1999).
- [4] S. M. Carroll, *Liv. Rev. Rel.* 4, 1 (2001).
- [5] T. Padmanabhan, *Phys. Rep.* 380, 235 (2003).
- [6] S. Capozziello, G. Lambiase, *Gen. Relativ. Grav.* 32, 295 (2000).
- [7] J. C. C. de Souza, V. Faraoni, *Class. Quantum Grav.* 24, 3637 (2007).
- [8] B. Vakili, *Phys. Lett. B* 664, 16 (2008).
- [9] J. C. Fabris, S. V. B. Gonçalves, P. E. de Souza, *Gen. Relativ. Gravit.* 34, 53 (2002).
- [10] G. M. Kremer, *Gen. Relativ. Gravit.* 35, 1459. (2003).
- [11] L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavón, *Phys. Rev. D* 67, 087302 (2003).
- [12] D. Pavón and W. Zimdahl, *Phys. Lett. B* 628, 206 (2005).
- [13] J. Zhang, X. Zhang and H. Liu, *Phys. Lett. B* 651, 84 (2007).
- [14] B. Wang, Y.G. Gong and E. Abdalla, *Phys. Lett. B* 624, 141 (2005).
- [15] J. B. Binder and G. M. Kremer, *Gen. Rel. Grav.* 38, 857 (2006).
- [16] G. Huey and B. D. Wandelt, *Phys. Rev. D* 74, 023519 (2006).
- [17] L. Amendola, *Phys. Rev. D* 62, 043511 (2000).
- [18] L. Amendola and D. Tocchini-Valentini, *Phys. Rev. D* 66, 043528 (2002).
- [19] G. R. Farrar and P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* 604, 1 (2004).
- [20] H. M. Sadjadi and N. Vadood, *JCAP* 0808, 036, (2008).

- [21] K. Karwan, JCAP 0805, 011, (2008).
- [22] Rong-Jia Yang and Xiang-Ting Gao, arXiv:1006.4986v2 [gr-qc].
- [23] O. A. Lemets, D. A. Yerokhin, and L. G. Zazunov, arXiv:1010.0567v1 [astro-ph.CO].
- [24] D. V. Ahluwalia-Khalilowa and D. Grumiller, JCAP 0701, 018, (2007).
- [25] R. R. Caldwell et. al., Phys. Rev. Lett. 91, 071301, (2003).
- [26] L. P. Chimento and R. Lazkoz, Phys. Rev. Lett. 91, 211301, (2003).
- [27] C. G. Bömer and J. Burnett, arXiv:0906.1351v1 [gr-qc].
- [28] I. Brevik and O. Gorbunova, Gen. Rel. Grav. 37, 2039, (2005).
- [29] J. Ren and Xin-He Meng, Int. J. Mod. Phys. D 16, 1341, (2007).
- [30] J. Chen and Y. Wang, arXiv:0904.2808v2 [gr-qc].
- [31] I. Brevik, Int. J. Mod. Phys. D 15, 767, (2006).
- [32] L. Chimento, M. Forte and G. M. Kremer, Gen. Rel. Grav. 41, 1125 (2009).
- [33] A. Einstein, Annalen der Physik 49, (1916).
- [34] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. John Wiley and Sons, 1972.
- [35] R. M. Wald, General Relativity., The University of Chicago Press, 1984.
- [36] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry vol I., Interscience Publishers, 1963.
- [37] M. P. do Carmo, Riemannian Geometry. Birkhäuser, 1992.
- [38] R. A. D’Inverno, Introducing Einstein’s Relativity., Oxford University Press, 1997.
- [39] M. Peskin and D. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory., Westview Press, 1995.
- [40] K. S. O. Filho e M. F. O. Saraiva, Astronomia e Astrofísica. Editora da Livraria da Física, 2004.
- [41] A. Liddle, An Introduction to Modern Cosmology. Wiley, 2007.
- [42] G. Gamow, Phys. Rev. 74, 4, 505 (1948).
- [43] R. A. Alpher and R. C. Herman, Phys. Rev. 74, 12, (1948).
- [44] V. Rubin, W. K. Ford Jr, *Astrophys. J.* 159, 359, (1970).
- [45] L. V. E. Koopmans, T. Treu, *Astrophys. J* 583, 2, 606, (2003).

- [46] W. L. Freedman et al., *Astrophys. J.* 533, 47 (2001).
- [47] C. L. Bennett et al., *Astrophys. J. Supp.* 148, 1, (2003).
- [48] M. Fukugita, P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* 616, 643 (2004).
- [49] A. G. Riess et al., *Astrophys. J.* 659, 98, (2007).
- [50] A. Liddle and D. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure.*, Cambridge University Press, 2000.
- [51] L. Amendola, C. Quercellini, D. Tocchini-Valentini and A. Pasqui, *Astrophys. J.* 583, L53 (2003).
- [52] L. Amendola and D. Tocchini-Valentini, *Phys. Rev. D* 66, 043528 (2002).
- [53] H. Wei, arXiv:1004.4951v1 [astro-ph.CO].
- [54] G. M. Kremer and C. Cercignani, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications.*, Birkhäuser, 2002.
- [55] J. L. Anderson and H. R. Witting, *Physica* 74, 489, (1974).
- [56] D. Jou, J. Casas-Vázquez, and Georgy Lebon, *Extended Irreversible Thermodynamics.*, Springer, 2010.
- [57] R. Maartens, arXiv:astro-ph/9609119v1.
- [58] C. Eckart, *Phys. Rev.* 58, 267, (1940).
- [59] C. Eckart, *Phys. Rev.* 58, 269, (1940).
- [60] C. Eckart, *Phys. Rev.* 58, 919, (1940).
- [61] I. Müller and T. Riggeri, *Rational Extended Thermodynamics*, Springer, 1998.
- [62] C. Cattaneo, *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, 3, (1948).
- [63] I. Müller, *Zur Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen in kontinuierlichen Medien*, Ph.D. Thesis, (RWTH Aachen, Aachen, Germany, 1966).
- [64] I. Müller, *Z. Phys.*, 198, 329, (1967).
- [65] I. Müller, *Living Rev. Relativity*, 2, 1,(1999).
- [66] M. B. William, *Introduction to Bayesian Statistics*, 2nd edition, Wiley, 2007.
- [67] M. Kowalski et al., *Astrophys. J.* 686, 749, (2008).
- [68] W.H. Press et al., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [69] R. Trotta, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 378, 819 (2007).

- [70] L. P. Chimento, M. Forte, and G. M. Kremer, *Gen. Rel. Grav.*, 41, 1125, (2009).
- [71] G. M. Kremer and F. P. Devecchi, *Phys. Rev. D* 66, 063503, (2002).
- [72] G. M. Kremer and F. P. Devecchi, *Phys. Rev. D* 67, 047301, (2003).
- [73] J. Simon, L. Verde and R. Jimenez, *Phys. Rev. D* 71, 123001 (2005).
- [74] J. M. Virey et al *Phys. Rev. D* 72, 061302 (2005).
- [75] A. G. Riess et al. *Astrophys. J.* 607, 665 (2004).
- [76] M. Hicken et. al, arXiv:0901.4804v3 [astro-ph.CO].
- [77] G. M. Kremer and M. C. N. Teixeira da Silva, *Braz. J. Phys.* 34, 1204-1207, (2004).